UMA REFLEXÃO SOBRE O PAPEL FUNDACIONAL DA TEORIA DOS CONJUNTOS NA MATEMÁTICA

César Frederico dos Santos

Resumo
É lugar comum, no meio filosófico, a afirmação de que a teoria dos conjuntos constitui os fundamentos da matemática. No entanto, a noção de fundamento, historicamente cercada de uma extensa rede de significados e anseios filosóficos, pode dar margem a interpretações inadequadas do papel desempenhado por essa teoria na matemática. Nosso objetivo, nesse artigo, é afastar algumas dessas confusões à luz de resultados matemáticos da própria teoria, e afirmar um sentido matemático em que a teoria dos conjuntos pode ser dita propriamente integrante dos fundamentos da matemática.

Palavras-chave
Fundamentos da matemática, teoria dos conjuntos.

Abstract
It's common in philosophical circles to claim that set theory is in the foundations of mathematics. However, the idea of foundations has historically been related to various philosophical meanings and expectations, and this can give room to erroneous interpretations of the role of set theory in mathematics. In this article, our purpose is to dispel such confusions by referring to mathematical results obtained in the set theory itself, and to state a mathematical sense in which we can properly affirm that set theory is in the foundations of mathematics.

Keywords
Foundations of mathematics, set theory.

Mestre (UFSC)

De modo lacônico, Kunen (2009, p. 14) afirma que “a teoria dos conjuntos é a teoria de tudo”. Com esta frase de impacto, Kunen chama a atenção para um fato notável: todos os objetos matemáticos usuais podem ser definidos como conjuntos e suas propriedades usuais podem ser provadas como teoremas da teoria dos conjuntos[1]. Outra forma sucinta de afirmar o mesmo é dizer que toda a matemática usual pode ser *reduzida* à teoria dos conjuntos. Por exemplo, podemos representar os números naturais como conjuntos e assim reduzir a aritmética à teoria dos conjuntos. Para tanto, definimos cada número natural como um conjunto determinado. Um modo de fazer isso começa por definir 0 como sendo o conjunto vazio, $\varnothing$; 1 como sendo o conjunto $\{0\}$, isto é, $\{\varnothing\}$; 2 como sendo $\{0, 1\}$, isto é, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; três como sendo $\{0, 1, 2\}$, isto é $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; e assim por diante. Por essa abordagem, intuitivamente, cada número natural é definido como o conjunto dos números naturais menores que ele. Tendo definido assim cada número natural, podemos deixar de lado os números e tratar diretamente com os conjuntos que os definem. Reunimos então todos esses conjuntos e formamos o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$. Na sequência pode-se provar que $\mathbb{N}$ satisfaz os axiomas de Peano, sentenças que capturam as características básicas dos números naturais. De fato, os axiomas de Peano convertem-se em teoremas da teoria dos conjuntos. A definição dos números como conjuntos prossegue, a partir daí, definindo-se, *grosso modo*, os números inteiros como pares ordenados de naturais e os números racionais como pares ordenados de inteiros. Similarmente, os teoremas usuais sobre inteiros e racionais são provados como teoremas da teoria dos conjuntos. Os reais exigem uma estratégia mais elaborada, sendo definidos a partir dos racionais como cortes de Dedekind[2]. E as estratégias multiplicam-se, permitindo a definição em termos conjuntistas não só dos números, mas de uma enorme variedade de objetos matemáticos que abarca até os conceitos mais abstratos da matemática contemporânea.

Essa redução da matemática usual à teoria dos conjuntos pode ser interpretada, do ponto de vista lógico, como a conversão da matemática em um grande sistema formal cujos axiomas são os axiomas de ZFC, e tudo o mais é provado como teorema desse sistema. Muitos filósofos e matemáticos, expressando-se metaforicamente, têm

---

[1] De fato existe uma grande variedade de teorias dos conjuntos, estudadas pelos mais diversos motivos. Usar o artigo definido “a” diante de “teoria dos conjuntos” é, portanto, um abuso de linguagem. Porém, como na maior parte das vezes estaremos nos referindo àquela que se consolidou como teoria padrão – a *teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha*, comumente referida por ZFC – continuaremos a cometer tal abuso.

[2] Enderton (1977) apresenta de forma bastante didática como se processa a definição na teoria dos conjuntos de naturais, inteiros, racionais e reais, bem como de vários outros objetos matemáticos.

comparado esse grande sistema formal a um edifício, no qual os axiomas de ZFC constituem os *fundamentos*, e todos os outros teoremas e definições são constituídos sobre eles, apoiando-se nos fundamentos, como se fossem os andares superiores do edifício. Essa visão metafórica, bastante difundida, está presente nas páginas iniciais de muitos livros-texto de teoria dos conjuntos. Por exemplo, Hrbacek e Jech (1999, p. 1) dizem: "neste livro, queremos desenvolver a teoria dos conjuntos como um fundamento para outras disciplinas matemáticas". Kunen (2009, p. 7) segue a mesma linha: "estudamos teoria dos conjuntos primeiro porque ela é o fundamento de tudo". Machover (1996, p. 9) não foge à regra: "A teoria dos conjuntos ocupa uma posição fundamental no edifício da matemática moderna".

O largo emprego dessa metáfora mostra o quanto ela é considerada apropriada para expressar o sentimento que matemáticos e filósofos nutrem pela teoria dos conjuntos. Entretanto, como toda figura de linguagem, essa também pode levar a equívocos. Sua adoção pode indicar que talvez se espere que os axiomas de ZFC forneçam alguma espécie de *sustentação* para a matemática, analogamente ao papel que os fundamentos de um edifício desempenham com relação aos seus andares superiores. Porém, é importante avaliar com cuidado que tipo de *sustentação* a teoria dos conjuntos é capaz de dar ao edifício da matemática. Vários resultados e desenvolvimentos da própria teoria dos conjuntos, como é sabido, mostram que a metáfora dos fundamentos deve ser tomada com cautela. Muito do que, filosoficamente, esperar-se-ia dos fundamentos de uma disciplina, ao menos de uma perspectiva tradicional, não pode ser fornecido pela teoria dos conjuntos. Levando em conta tais resultados e desenvolvimentos significativos da própria teoria, em que sentido podemos afirmar que a teoria dos conjuntos constitui os fundamentos da matemática?

Anseios fundacionais filosóficos não supridos pela teoria dos conjuntos

O maior risco da visão metafórica do papel lógico desempenhado pela teoria dos conjuntos é que ela pode evocar uma antiga tradição em epistemologia que, levando mais longe a metáfora do edifício, queria que os fundamentos fossem sólidos; assim como os alicerces de um edifício, mais firmes que os andares superiores. É um fato da engenharia que a fragilidade dos fundamentos pode levar todo o edifício ao colapso. Na tradição epistemológica, solidez está associada à certeza, clareza e evidência. Analogamente à engenharia, esperava-se que os fundamentos de uma disciplina fossem mais certos, mais claros e evidentes que o restante da disciplina que se desejava fundamentar. Ainda de acordo com a tradição epistemológica, pensava-se que a reconstrução lógica de uma disciplina tinha o poder de revelar os pressupostos mais básicos nos quais a disciplina se apoiava, os seus fundamentos. Tudo estaria bem se a análise lógica encontrasse pressupostos mais certos, claros e evidentes que o restante da disciplina. Fundamentos dessa natureza, aliados à estrita dedução lógica das demais verdades da disciplina a partir deles, garantiriam solidez a todo o edifício. Fundamentos menos certos levariam o edifício a estremecer.

A teoria dos conjuntos não é fundamento da matemática nesse sentido clássico. Quando dizem que a teoria dos conjuntos é o fundamento da matemática, os matemáticos não estão empregando inteiramente a metáfora dos fundamentos no sentido da epistemologia tradicional. O sentido clássico continua sintonizado com o entendimento atual na medida em que a reconstrução lógica da matemática na teoria dos conjuntos é comparada a um edifício em que os axiomas de ZFC estão no começo, na base, e tudo o mais é construído sobre eles. A parte da metáfora que não se aplica mais é a exigência de que os fundamentos sejam mais sólidos – no sentido de mais certos, claros e evidentes – que os andares superiores. Não sujeito às mesmas condições que obras de engenharia civil, o edifício da matemática não precisa de solidez nas bases, ao menos naqueles sentidos clássicos.

Separa a antiga da nova metáfora dos fundamentos uma profunda transformação no modo como é encarada a análise lógica de uma disciplina e o papel dos axiomas. Kunen traz três exemplos de emprego do método axiomático que ilustram essa transformação. O primeiro exemplo, a axiomatização da geometria, feita por volta de 300 a.C por Euclides, é a ilustração mais exata da antiga concepção. De acordo com a visão clássica grega, os axiomas da geometria euclidiana eram encarados como "afirmações de fé", isto é, "fatos obviamente verdadeiros sobre o espaço físico real, dos quais se podem derivar outros fatos verdadeiros mas não óbvios, de tal forma que estudando geometria se está estudando a estrutura do mundo real" (KUNEN: 2009, p. 6). O segundo exemplo de Kunen, a teoria dos grupos[3], cujo tratamento axiomático foi

[3] A teoria de grupos é uma teoria de primeira ordem **G** cujo único símbolo não-lógico é a função binária * e cujos axiomas não-lógicos são os seguintes:

(a) $\forall xyz(x*(y*z) = (x*y)*z)$

(b) $\exists u(\forall x(x*u = u*x = x) \wedge \forall x\exists y(x*y = y*x = u))$

dado por Cayley no século XIX, ilustra a atual concepção. Os axiomas da teoria dos grupos são vistos como afirmações definicionais: “os axiomas não capturam nenhuma 'verdade universal'; eles servem apenas para definir uma classe de estruturas útil” (KUNEN: 2009, p. 6). Ao passo que na visão clássica da geometria euclidiana os axiomas pretendiam estar sujeitos a uma única interpretação – desejava-se que eles expressassem propriedades básicas dos objetos geométricos do mundo físico real – os axiomas da teoria dos grupos podem ser interpretados de infinitos modos. Qualquer estrutura que satisfaça seus axiomas é uma interpretação possível da teoria dos grupos.

As duas posturas são muito diferentes, e essa diferença não está no próprio sistema axiomático, mas nas intenções de quem o aborda. Tanto como afirmações de fé quanto como definicionais, os axiomas podem ser apresentados formalmente em uma linguagem lógica, de sorte que não haverá nada no próprio sistema formal que permita distingui-los. São as explicações que acompanham a apresentação do sistema formal, mas que não o integram, que revelam as intenções de quem o aborda e, por conseguinte, revelam se aquele sistema está sendo encarado como afirmação de fé ou definicionalmente. Daí que o mesmo sistema formal pode servir aos dois propósitos. No caso dos axiomas tomados como afirmações de fé, a abordagem começa por uma explicação intuitiva das noções básicas envolvidas, os chamados conceitos primitivos, para os quais se podem introduzir símbolos primitivos na linguagem formal. Em seguida, é apresentada uma lista de afirmações sobre aqueles conceitos, que são reconhecidas como verdadeiras com base nas explicações anteriores. Essas afirmações são mapeadas em sentenças expressas na linguagem formal, e então passam a constituir os axiomas do sistema. Com os sistemas axiomáticos vistos como definicionais, a abordagem é outra. Símbolos primitivos são introduzidos desacompanhados de uma explicação intuitiva de seus significados. Os axiomas são uma lista de sentenças que articulam os símbolos primitivos, mas não existe a intenção de que eles sejam verdadeiros sobre aqueles símbolos, inclusive porque não está em tela o significado dos símbolos. A explicação intuitiva é dispensada, dentre outros motivos, porque um sistema axiomático definicional pode se aplicar a um grande número de conceitos diferentes. Ora o sistema pode ser “interpretado” como referindo-se a uns conceitos, ora como referindo-se a outros, e isso não tem importância para o sistema formal como tal.

Modelos de **G** são estruturas <*G*, *> tais que *G* é um conjunto e * é uma função de *G* 苘 *G* em *G* e que satisfazem os axiomas (a) e (b). O axioma (a) requer que * seja associativa e o axioma (b) exige a existência de elemento identidade *u* e, para cada elemento de *G*, a existência de um inverso *y*.

Quando um sistema axiomático é encarado como afirmações de fé, a interpretação pretendida está fixada, e o estudo do sistema axiomático está atrelado ao estudo daquela interpretação. Num sistema axiomático visto como definicional, não se fica preso a uma interpretação específica; a interpretação dada ao sistema varia de acordo com o que se quer mostrar.

O terceiro exemplo de Kunen é justamente a teoria dos conjuntos, e ilustra a passagem da concepção clássica de axioma para a concepção atual. Quando a primeira axiomatização bem sucedida foi apresentada por Zermelo em 1908, seus axiomas eram vistos como afirmações de fé. A matemática até então, conta Kunen, era composta por vários sistemas axiomáticos desconexos que com o advento da teoria dos conjuntos puderam ser subsumidos a ela. Ainda dentro do ideal clássico, os matemáticos acreditavam que essa redução da matemática à teoria dos conjuntos melhorava a situação epistemológica da matemática, pois a partir de então havia prova para todas as proposições matemática usuais, e as únicas verdades que precisavam ser postuladas eram os axiomas de ZFC. Pensavam que os axiomas descreviam verdadeiramente características básicas dos conjuntos, que alguns acreditavam constituir uma realidade independente. Gödel, por exemplo, afirmava que "os conceitos e teoremas da teoria dos conjuntos descrevem alguma realidade bem determinada" (GÖDEL: 1983, p. 476). No entanto, essas ideias não duraram muito tempo. O desenvolvimento da teoria dos conjuntos tornou cada vez mais implausível pensar em seus axiomas como afirmações de fé. O trabalho do próprio Gödel foi responsável, em parte, por essa transformação. Segundo Kanamori,

> Antes de Gödel, os principais interesses [dos teóricos conjuntistas] recaíam sobre o que conjuntos *são* e como conjuntos e seus axiomas podem servir como uma base redutiva para a matemática. (...) Depois de Gödel, os principais interesses tornaram-se o que conjuntos *fazem* e como a teoria dos conjuntos há de avançar como um campo autônomo da matemática (KANAMORI: 2007, p. 39).

Para provar a consistência relativa da hipótese do contínuo e do axioma da escolha, Gödel construiu um *modelo interno* da teoria dos conjuntos. Com isso, Gödel inaugurou um método de provas de consistência relativa em teoria dos conjuntos que consiste na reinterpretação da teoria de forma a construir um modelo[4] *não-trivial*, isto é, um modelo que não combina, necessariamente, com a interpretação pretendida. Na

---

[4] Ao falar de "modelos" de ZFC estamos cometendo, novamente, um abuso de linguagem. Como é sabido, o segundo teorema de incompletude de Gödel impede que ZFC tenha modelo no sentido próprio.

interpretação pretendida, o universo é composto por todos os conjuntos, ao passo que no modelo interno de Gödel o universo é limitado apenas aos conjuntos construtíveis. Quando axiomas são encarados como afirmações de fé, o interesse fica restrito a estudar apenas *o* universo intuitivo, aquele que se acredita corresponder à realidade subjacente à teoria. Mas o método de Gödel consiste opostamente na criação de um modelo em que o universo é ajustado para provar a consistência relativa de uma ou outra proposição. Nesse sentido não importa mais o que os conjuntos *são* – pois conforme varia o modelo considerado, varia o que são os conjuntos. A preocupação predominante, como atesta Kanamori (2007), passou da ontologia – o que são os conjuntos – para a epistemologia – o que podemos provar sobre os conjuntos.

O próxima passo nessa direção foi dado por Cohen. Para provar a consistência relativa da negação da hipótese do contínuo e da negação do axioma da escolha, Cohen criou o método de *forcing*, que permite construir modelos em que a cardinalidade do contínuo é quase qualquer cardinal maior ou igual a $\aleph_1$. O *forcing* tornou-se um método geral e flexível de estender modelos de ZFC, deslocando ainda mais o interesse da questão sobre o que são os conjuntos, pois expandiu grandemente as possibilidades de criar interpretações não-triviais da teoria, para a questão sobre o que se pode provar sobre os conjuntos. Kanamori sintetiza a transformação que o *forcing* proporcionou na teoria dos conjuntos:

> Com sugestões claras de um modo novo e concreto de construir modelos, teóricos conjuntistas apressaram-se e usando *forcing* rapidamente foi estabelecida uma cornucópia de resultados de consistência relativa (...) Rapidamente, ZFC tornou-se totalmente diferente da geometria euclidiana e muito mais parecida com a teoria dos grupos, com uma larga gama de modelos da teoria dos conjuntos sendo investigados por seu próprio interesse. A teoria dos conjuntos experimentou uma mudança profunda (...) (KANAMORI: 2008, p. 351)

Kunen enfatiza a mesma transformação (KUNEN: 2009, p. 7). Diante desse panorama criado pelas inovações metodológicas de Gödel e Cohen, não é mais possível encarar os axiomas de ZFC como afirmações de fé descrevendo uma realidade bem determinada de conjuntos. A interpretação pretendida de ZFC, que inicialmente era vista como espelhando aquela realidade, agora é encarada como apenas mais uma dentre tantas interpretações da teoria. A exemplo da teoria dos grupos, os axiomas da teoria dos conjuntos são então pensados como axiomas definicionais que delimitam uma classe de modelos sobre os quais recai o interesse matemático. É importante notar que essa mudança de visão sobre os axiomas de ZFC foi motivada por razões matemáticas, induzidas por inovações técnicas, metodológicas, e não por razões filosóficas.

Mas, afora os rumos matemáticos da teoria dos conjuntos, filosoficamente também há razões para não tomar seus axiomas como afirmações de fé. Lembra Quine que a certeza e obviedade dos axiomas da teoria dos conjuntos são inferiores à certeza e obviedade de muitos dos teoremas que se provam a partir deles (QUINE: 1969, p. 70). Por exemplo, a aritmética dos números naturais, cujas propriedades básicas são capturadas pelos axiomas de Peano, desfruta de muito mais evidência e apelo à obviedade do que a teoria dos conjuntos. No entanto, os axiomas de Peano são provados como teoremas de ZFC. Sob a perspectiva fundacional clássica essas provas têm pouco valor, pois é como se se tentasse provar o mais certo recorrendo ao menos certo.

Não foi só a teoria dos conjuntos que passou por uma transformação no modo de encarar seus axiomas. Mesmo a geometria euclidiana, epítome de sistema axiomático reputado como *afirmação de fé,* deixou de ser o estudo das propriedades básicas do espaço real – pelo menos desde Einstein ela é sabidamente problemática como descrição do espaço físico real – para ser o estudo dos modelos que satisfazem seus axiomas. Contemporaneamente, é muito mais natural conceber sistemas axiomáticos como definicionais do que como afirmações de fé. O ideal da epistemologia tradicional, que procurava pela análise lógica revelar os alicerces sólidos das ciências está, ao menos na matemática, abandonado.

Mais uma confusão a respeito do papel fundacional da teoria dos conjuntos consiste em pensar que uma definição de um objeto matemático na teoria dos conjuntos pode ser tomada como revelando a verdadeira identidade daquele objeto. Por exemplo, ao ver que o número dois pode ser definido, como fez von Neumann e nós seguimos no início deste artigo, pelo conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, a confusão é pensar que o número dois é, *na verdade*, o conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. A constatação de que a teoria dos conjuntos não goza de nenhum privilégio epistemológico sobre a aritmética dos números naturais já torna inverossímil imaginar que ela teria o poder de revelar a verdadeira identidade dos números naturais. Mas não é preciso ir tão longe. Benacerraf (1983) mostra que isso é impossível, não por razões filosóficas, mas por uma razão matemática: há infinitas formas de definir os números na teoria dos conjuntos, todas funcionando igualmente bem. Zermelo, por exemplo, definiu o número dois pelo conjunto $\{\{\varnothing\}\}$. Esse fenômeno não acontece só com os números, pelo contrário, é comum a muitas definições de objetos matemáticos em termos conjuntistas. Em geral, há razões técnicas para preferir uma definição a outra, mas não são razões suficientes para justificar uma tese metafísica de que um objeto é, de fato, um conjunto e não outro. Em suma, embora objetos matemáticos possam ser representados como conjuntos, eles não têm de ser conjuntos.

Há ainda outros riscos menores envolvidos com a metáfora dos fundamentos. Um deles, e para o qual Kunen também chama a atenção, é pensar que, por ser a teoria dos conjuntos o fundamento da matemática, toda a informação exigida para desenvolver a matemática, e mesmo para compreender a própria teoria dos conjuntos, esteja contida nela. "Teoria dos conjuntos é a teoria de tudo, mas isso não significa que você possa entender [uma] apresentação axiomática de teoria dos conjuntos se você não sabe absolutamente nada", diz Kunen (2009, p. 28). Antes de poder compreender uma apresentação axiomática formal da teoria dos conjuntos, é preciso ter o que Kunen chama de *raciocínio finitista*. Por exemplo, para entender o que é um axioma formal, é preciso entender o que é uma fórmula lógica, o que por sua vez exige entender o que é uma expressão, isto é, uma sequência *finita* de símbolos. Embora as noções de finitude e infinitude tenham definição formal em ZFC, antes mesmo de começar a entender ZFC é preciso ter uma noção prévia de finitude. É com base nesse conhecimento metateórico, que do ângulo da compreensão precede o conhecimento teórico, que as várias noções da teoria formal são apresentadas e explicadas. Embora constitua o fundamento lógico da matemática, da perspectiva da experiência de aprendizado a teoria dos conjuntos está bastante além dos fundamentos. Como dizia Russell, "as coisas mais óbvias e fáceis em matemática não são as que vêm logicamente no começo; são aquelas que, do ponto de vista da dedução lógica, começam em algum lugar do meio" (RUSSELL: 2007, p. 18). Se na perspectiva lógica a teoria dos conjuntos ocupa os alicerces do edifício, sob o enfoque da compreensão ela ocupa andares intermediários, e os alicerces são ocupados pelas noções metateóricas.

O papel que o raciocínio finitista desempenha não se resume apenas a ser indispensável na compreensão de uma teoria formal como ZFC. Uma ideia de raciocínio finitista foi especialmente importante no programa de Hilbert, no início do século XX, que buscava formalizar as teorias matemáticas usuais e demonstrar a consistência, de forma absoluta, dessas teorias formais. A teoria dos conjuntos permite a formalização das teorias matemáticas usuais, e permite também provar a consistência dessas teorias. Mas essas são sempre provas relativas, pois dependem de assumir-se sem provar que ZFC é consistente. Uma prova absoluta da consistência da matemática exigiria uma prova absoluta da consistência da teoria dos conjuntos, isto é, uma prova que não exija assumir duvidosamente a consistência de uma outra teoria, caso contrário seria novamente uma prova de consistência relativa. Porém, toda prova tem que tomar lugar em alguma teoria. Hilbert, então, desejava uma teoria suficientemente simples para que sua consistência fosse intuitiva e obviamente dada, sem precisar prová-la. Ele escolheu uma versão elementar da aritmética, mais simples que a aritmética usual, que ele chamou de "matemática finitária". Essa teoria trata de um domínio de entidades em algum sentido concretas – os símbolos de um sistema formal – cuja verdade e consistência, queria Hilbert, podia ser verificada pelos sentidos. Se Hilbert atingisse seu intento, provando a consistência absoluta da teoria dos conjuntos provaria também a consistência da matemática usual, e com isso garantiria a segurança da matemática e de seus métodos. Assim, mesmo que o caráter fundacional da teoria dos conjuntos não pudesse ser aquele desejado pela epistemologia tradicional, ao menos a teoria dos conjuntos garantiria que a matemática construída sobre ela estava livre de contradições[5].

Ocorre que a matemática finitária de Hilbert, sendo uma simplificação da aritmética, pode, naturalmente, ser desenvolvida dentro da teoria dos conjuntos. Assim, se houvesse uma da prova da consistência da teoria dos conjuntos na matemática finitária de Hilbert, essa prova poderia ser obtida na teoria dos conjuntos, resultando numa prova da consistência da teoria dos conjuntos na própria teoria dos conjuntos. Contudo, o segundo teorema de incompletude de Gödel impede tal prova[6]. A consistência da teoria dos conjuntos só pode ser provada em uma teoria mais forte que a teoria dos conjuntos, ou seja, não há como escapar de provas de consistência relativas. O programa de Hilbert, pelo menos da maneira como é geralmente entendido, é irrealizável. Além de a teoria dos conjuntos não ser capaz de dotar a matemática da certeza almejada pela epistemologia tradicional, o fracasso do programa de Hilbert mostra que nem mesmo a consistência da matemática, um requisito aparentemente mais singelo, pode ser assegurada pela teoria dos conjuntos. Novamente, foram resultados matemáticos, e não reflexões filosóficas, que puseram fim à esperança de assegurar a consistência da matemática por meio da teoria dos conjuntos.

---

[5] Uma apresentação didática do programa de Hilbert, na qual nos baseamos, pode ser encontrada em Silva (2007), capítulo 5, *O Formalismo*.

[6] Esse é o entendimento dominante, mas Detlefsen (1986) defende que esse argumento contra o programa de Hilbert baseado no segundo teorema de Gödel não é conclusivo.

Um sentido técnico

As discussões acima nos recomendam não concluir que a fundamentação lógica na teoria dos conjuntos dote a matemática de mais certeza, muito menos que a torne isenta de contradições ou que revele a verdadeira identidade dos objetos matemáticos, se é que há tal coisa. Mas se esses anseios filosóficos, tradicionalmente associados à ideia de *fundamentos*, não se realizam pela teoria dos conjuntos, o que sobra?

Sobram os vários benefícios matemáticos da teoria dos conjuntos. Embora os resultados que expõem as limitações filosóficas da fundamentação da matemática na teoria dos conjuntos já sejam amplamente conhecidos há muitas décadas, é fato que muitos matemáticos veem incontáveis benefícios matemáticos na teoria dos conjuntos, e continuam mesmo vendo nela uma fundamentação da matemática. As passagens introdutórias de alguns livros-texto de teoria dos conjuntos que citamos no início deste artigo exemplificam como essa prática continua viva. Assim, é de se esperar que os matemáticos empreguem essa metáfora em um sentido determinado, não abalado por aqueles resultados.

Embora a maioria dos matemáticos não forneça detalhes sobre o sentido em que emprega a noção de fundamentos com respeito à teoria dos conjuntos, podemos encontrar em Moschovakis (2006) um breve mas significativo esclarecimento.

> A teoria dos conjuntos é uma interessante e vibrante teoria matemática, com suas próprias noções básicas, resultados fundamentais, profundas questões em aberto e com significantes aplicações em outras teorias matemáticas. Ao mesmo tempo, a *teoria dos conjuntos axiomática* é muitas vezes vista como uma *fundamentação da matemática*: alega-se que todos os objetos matemáticos são conjuntos e que suas propriedades podem ser derivadas dos relativamente poucos e elegantes axiomas sobre conjuntos. Nada tão simplório pode ser totalmente verdadeiro, no entanto há pouca dúvida de que na prática matemática padrão atual “tornar uma noção precisa” é essencialmente sinônimo de “defini-la na teoria dos conjuntos”. A teoria dos conjuntos é a linguagem oficial da matemática, exatamente como a matemática é a linguagem oficial da ciência (MOSCHOVAKIS: 2006, p. vii).

É fato que não se pode concluir que todos os objetos matemáticos usuais *sejam* conjuntos, como lembra Moschovakis, pelas razões que discutimos acima. Mas, mesmo deixando isso de lado, Moschovakis destaca o papel que a teoria dos conjuntos tem na obtenção de *precisão* e *rigor* na matemática. Apresentar uma definição rigorosa de uma noção matemática é, essencialmente, apresentar uma definição dessa noção em teoria dos conjuntos axiomática, testemunha Moschovakis. O rigor, a formulação precisa de conceitos, a explicitação das premissas e conclusões, a dedução lógica cuidadosa, enfim, são aspectos altamente valorizados na prática matemática. Por certo, esses aspectos guardam íntima relação com a ideia de *fundamentos* e podem ser promovidos pela teoria dos conjuntos apesar de suas limitações filosóficas.

Mas que valor tem uma definição formal de um objeto em termos conjuntistas se esse objeto, de fato, não é um conjunto? "Pontos, números, funções, produtos cartesianos e outros objetos matemáticos", continua Moschovakis (2006, p. 33), "claramente não são conjuntos". Apesar disso, afirma, "iremos descobrir dentro do universo dos conjuntos *representações fiéis* de todos os objetos matemáticos de que necessitamos, e iremos estudar teoria dos conjuntos com base no enxuto sistema axiomático de Zermelo **como se todos os objetos matemáticos fossem conjuntos**" (MOSCHOVAKIS: 2006, p. 34; grifo original). A chave da questão está no "*como se*": os matemáticos não precisam se comprometer com nenhuma tese ontológica sobre a natureza dos objetos matemáticos para que seja proveitosa a investigação dos substitutos conjuntistas desses objetos, porque eles podem estudar tais substitutos *como se* fossem os próprios objetos. O que permite essa estratégia é a garantia de que os substitutos conjuntistas sejam *representações fiéis* dos objetos que definem. Assim, acrescenta Moschovakis (2006, p. 34), "o problema delicado nos casos específicos é formular precisamente a definição correta de uma 'representação fiel' e provar que tal representação existe". Esse problema é solucionado empregando-se métodos matemáticos usuais, independentes de qualquer tese filosófica sobre a natureza ontológica dos objetos representados. Por exemplo, o que garante que os conjuntos que apresentamos no início deste artigo são representações fiéis dos números naturais (1, 2, 3, ...) é a prova, na teoria dos conjuntos, de que eles satisfazem os axiomas de Peano.

Ao converter-se na "linguagem oficial da matemática", como menciona Moschovakis, a teoria dos conjuntos permite o tratamento uniforme dos objetos matemáticos, colocando-os todos em um mesmo campo. O papel fundacional da teoria dos conjuntos está intimamente relacionado a esse seu poder unificador, como destaca Maddy (1997). Quando os objetos dos diversos ramos da matemática são definidos na mesma linguagem, áreas antes separadas são integradas. Isso abre novas possibilidades de expansão do conhecimento matemático:

> as interconexões entre seus ramos são iluminadas; teoremas clássicos são traçados a uma origem comum; métodos efetivos podem ser transferidos de uma área para outra; o poder total dos princípios conjuntistas mais básicos pode ser trazido a operar sobre problemas até então insolúveis; a viabilidade de prova de novas conjecturas pode ser avaliada; e sistemas axiomáticos ainda mais fortes encerram a promessa de consequências ainda mais férteis (MADDY: 1997, p. 28).

A teoria dos conjuntos realiza, na matemática, o tão desejado ideal científico de unificação teórica. Para as finalidades matemáticas, tratar os objetos matemáticos de maneira rigorosa e unificada, *como se fossem conjuntos*, podendo deixar de lado a preocupação filosófica a respeito de suas reais identidades, é o que interessa. As diversas frentes de investigação são harmonizadas em uma só grande teoria que dá conta das questões usuais, serve de língua franca entre pesquisadores de diferentes ramos e é poderosa o suficiente para guiar o desenvolvimento ulterior da disciplina, ainda que haja vários problemas matemáticos em aberto cuja solução talvez exija a extensão da teoria. A teoria dos conjuntos converte-se, assim, numa arena comum[7] onde disputas matemáticas são decididas ou declaradas indecidíveis de acordo com os axiomas usuais. Maddy resume assim:

> Finalmente, e talvez mais fundamentalmente, esta única arena para a matemática proporciona uma corte de apelação final para questões de existência e prova matemáticas: se você quer saber se existe um objeto matemático de um certo tipo, você pergunta (em última análise) se existe um substituto conjuntista daquele tipo; se você deseja saber se uma dada afirmação é demonstrável ou refutável, você quer dizer (em última análise), demonstrável ou refutável a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos. (MADDY, 1997, p. 26)

O que põe a teoria dos conjuntos nos fundamentos da matemática, em um sentido técnico, é, pois, seu poder formalizador – que proporciona precisão e rigor – aliado a seu poder unificador.

Embora, do ponto de vista filosófico, a fundamentação da matemática na teoria dos conjuntos seja frustrante – no que concerne às preocupações epistemológicas e metafísicas tradicionais –, do ponto de vista da matemática a fundamentação na teoria dos conjuntos é um sucesso. A célebre frase de Hilbert (2006, p. 83), “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”, expressa a dimensão desse sucesso. Igualmente expressivo é o desenvolvimento que a teoria dos conjuntos experimentou no século XX, mesmo depois de já estarem claras suas limitações como fundamento no sentido tradicional. O contraste entre o malogro filosófico e o êxito matemático pode ser revelador, na medida em que parece indicar que a matemática segue seu rumo independentemente do desfecho dos debates filosóficos sobre a matemática[8].

---

7 Maddy identifica a “arena única” proporcionada pela teoria dos conjuntos com o universo conjuntista V. Essa identificação, contudo, pode ser um tanto problemática, se levarmos em conta o fato de, atualmente, o desenvolvimento da teoria dos conjuntos ter privilegiado o exame dos inúmeros “modelos” da teoria, sem assumir compromisso especial com V. Mas não vamos abordar esse possível problema aqui.

8 A ideia de que o desenvolvimento da matemática independe dos debates filosóficos em seu entorno é uma das teses centrais de Maddy (1997).

A teoria dos conjuntos não pode fornecer o tipo de certeza e segurança que a epistemologia tradicional procurava, nem pode responder às indagações metafísicas sobre a real natureza dos entes matemáticos. A teoria dos conjuntos não está nos fundamentos da matemática por razões filosóficas, mas sim por razões lógico-matemáticas: seu poder unificador e formalizador permite reconstruir sobre ela de maneira rigorosa toda a matemática usual, e isso traz uma série de vantagens matemáticas. Embora a metáfora dos fundamentos continue perfeitamente cabível do ponto de vista lógico-matemático, restrito à caracterização técnica do papel fundacional da teoria dos conjuntos, do ponto de vista filosófico tradicional essa metáfora não faz sentido, e a teoria dos conjuntos estaria mais bem posicionada ao lado dos demais ramos da matemática no que tange ao status do conhecimento. Concluímos citando Maddy (1997, p. 33): “os verdadeiros benefícios da fundamentação na teoria dos conjuntos não são epistêmicos, mas matemáticos”.

REFERÊNCIAS

BENACERRAF, P. **What numbers could not be**. In: PUTNAM, H.; BENACERRAF, P. (Ed.). **Philosophy of Mathematics**. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. p. 272-294.

DETLEFSEN, M. **Hilbert's Programme**. Dordrecht, Holland: Reidel, 1986.

ENDERTON, H. B. **Elements of set theory**. New York: Academic Press, 1977.

GöDEL, K. **What is Cantor's continuum problem?** In: PUTNAM, H.; BENACERRAF, P. (Ed.). **Philosophy of Mathematics**. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. p. 470-485.

HILBERT, D. **Sobre o infinito**. In: CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. (Ed.). **Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da Matemática**. São Paulo: UNESP, 2006. p. 76-91.

HRBACEK, K.; JECH, T. **Introduction to Set Theory**. Boca Raton: Taylor & Francis, 1999.

KANAMORI, A. **Set theory from Cantor to Cohen**. [s.n.], 2007. Disponível em: <http://math.bu.edu/people/aki/16.pdf>. Acesso em: fev/2012.

KANAMORI, A. **Cohen and set theory**. The Bulletin of Symbolic Logic, Sept. 2008. Volume 14, number 3, pp. 351-378. Disponível em: <http://math.bu.edu/people/aki/14.pdf>. Acesso em: fev/2012.

KUNEN, K. **The Foundations of Mathematics**. London: College Publications, 2009. Disponível em: <http://www.math.wisc.edu/kunen/notes_post.ps (versão parcial)>. Acesso em: abr/2012.

MACHOVER, M. **Set theory, logic and their limitations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

MADDY, P. **Naturalism in Mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

MOSCHOVAKIS, Y. **Notes on Set Theory**. [S.l.]: Springer, 2006.

QUINE, W. V. O. **Epistemology naturalized**. In: Ontological Relativity and other essays. New York: Columbia University Press, 1969. p. 69-90.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SILVA, J. J. da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Unesp, 2007.