REVISTA Peri

V. 14 N. 01 2022

FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

# LÓGICA E ARITMÉTICA NO TRACTATUS DE WITTGENSTEIN: A IMPORTÂNCIA DA RECURSIVIDADE MATEMÁTICA PARA O MÉTODO DE TABELAS DE VERDADE

LOGIC AND ARITHMETIC IN WITTGENSTEIN'S TRACTATUS: THE IMPORTANCE OF MATHEMATICAL RECURSIVITY FOR THE TRUTH TABLES METHOD

Eduardo Simões[1]
Aline Aquino Alves[2]
Leandro de Oliveira Pires[3]

**Resumo:** O objetivo do artigo é apresentar o método de tabelas de verdade do cálculo proposicional do *Tractatus Logico-Philosophicus* como decorrente dos procedimentos de cálculo que envolvem operações recursivas no âmbito da matemática. A proposta é demonstrar o cálculo de base das operações de verdade como consequência da aplicação de recursos matemáticos que envolvem a noção de recursividade em séries formais, inspirada tanto no conjunto dos números naturais, quanto no cálculo fatorial, bem como nos procedimentos preconizados pela análise combinatória e pelo cálculo de probabilidade. Como diz Wittgenstein, "as funções de verdade podem ser ordenadas em série. Esse é o fundamento da teoria da probabilidade" (TLP 5.1). Espera-se, com isso, apresentar as operações de verdade do cálculo proposicional como provenientes da aplicação da aritmética aos recursos da lógica.

**Palavras-chave:** operações de verdade, cálculo proposicional, recursividade, Lógica, Matemática, Tractatus, Wittgenstein

**Abstract:** *The objective of the paper is to present the method of truth tables of the propositional calculus of Tractatus Logico-Philosophicus as arising from the calculus procedures involving recursive operations in the field of mathematics. The proposal is to demonstrate the base calculus of truth operations as a consequence of the application of mathematical resources involving the notion of recursion in formal series, inspired both in the set of natural numbers and in the factorial calculus, as well as in the procedures recommended by combinatorial analysis and the calculus of probability. As Wittgenstein says, "truth-functions can be arranged in series. That is the foundation of the theory of probability" (TLP 5.1). It is hoped, therefore, to present the truth operations of the propositional calculus as arising from the application of arithmetic to the resources of logic.*

***Keywords**: operations of truth, propositional calculus, recursivity, Logic, Mathematics, Tractatus, Wittgenstein*

[1] Universidade Federal do Tocantins.

[2] Universidade Federal do Tocantins.

[3] Universidade Federal do Tocantins.

## Introdução

É sabido que as tabelas, hoje chamadas de tabelas de verdade, foram concebidas independentemente por Wittgenstein e Emil Leon Post em 1921. Entretanto, a vasta influência do *Tractatus*[4] e o reconhecimento imediato da filosofia de Wittgenstein acabaram por associá-las ao filósofo austríaco, ofuscando assim o papel de Post em sua criação. Wittgenstein utilizava as tabelas para classificar funções de verdade em uma série. O intuito era o de determinar a validade de um argumento complexo a partir da validade de suas proposições elementares (TLP 4.27-4.45; 5.101). Trata-se de uma tentativa de construir uma notação ideal, capaz de revelar a sintaxe lógica subjacente a qualquer linguagem possível. Tal método expressa de maneira intuitiva o que significa dizer que o sentido proposicional é determinado por combinações de verdade. Combinações estas que exibem a função dos operadores lógicos de tal modo que nada é acrescentado por estes. Os operadores lógicos *não substituem* nada porque são somente elementos de "cópula", uma "espécie de cimento" que serve para ligar os componentes materiais das proposições e que sobram depois da abstração de tais componentes[5]. Da eliminação dos operadores resultam determinadas condições de verdade a partir das possibilidades de verdade, expressas pela bipolaridade proposicional. Todas as possibilidades de verdade são determinadas no espaço lógico com o objetivo de salvaguardar a determinabilidade do sentido proposicional. O que pretendemos apresentar nesse artigo é que tais possibilidades de verdade, demonstradas por meio do cálculo proposicional proposto por Wittgenstein, é, na verdade, decorrência da aplicação de um instrumento de cálculo que prima pela aplicação de operações recursivas (execução de um procedimento de maneira repetitiva) no âmbito da matemática. A recursividade das operações serve justamente como um método para, mecanicamente, evitar a construção de contrassensos, bastando para tanto seguir um procedimento algorítmico de geração de sinais. Diz-se recursivo aquilo que pode ser definido nos termos si próprio ou daquilo que deste deriva, como as condições de verdades – das tabelas de verdade – que derivam das possibilidades de verdade que, por sua vez, derivam dos argumentos de verdade, que são definidos por si só. A recursividade inerente ao cálculo proposicional do *Tractatus*, bem como à toda lógica clássica, é um

[4] A obra *Tractatus Logico-Philosophicus* (1922) será referenciada ao longo do corpo do texto pela sigla TLP seguida do número do aforismo que lhe corresponde.

[5] Isso foi dito por Wittgenstein nas Cartas a Russell, verão 1912 – 1.13, que estão reunidas em:
WRIGHT, G. H. von (org.). *Letters to Russell, Keynes and Moore*. Trad. ingl. B. F. McGuinness. Oxford: Blackwell, 1974.

ISSN 2175-1811

procedimento comum no campo da matemática. Sendo assim, não justifica apontar tal procedimento como uma "inovação" no campo da lógica contemporânea.

## 1 Cálculo proposicional e tabelas de verdade: a estratégia de Wittgenstein

As tabelas de verdade preconizam que, dadas *n* proposições elementares, existem $2^n$ possibilidades ou combinações possíveis de seus valores de verdade: $2^n$ possibilidades de realização ou não realização do que elas enunciam – sendo "*2*" suas possibilidades de verdade (V ou F) e "*n*" o número de proposições moleculares. A representação de que um fundamento de verdade aconteça (de que o resultado da operação seja V), que já contém a representação do que não ocorre, pode se fazer visível pela operação de verdade no cálculo proposicional.

Para fins ilustrativos, vejamos o resultado da implicação material que é apresentada no TLP 4.442:

| '*p* | *q* | ' |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| V | F | |
| F | F | V. |

Mesmo que a tabela não tenha sido apresentada preenchida em sua completude no exemplo dado pelo *Tractatus*, sabe-se, pela apresentação do "sinal proposicional", "(VVFV) (*p*,*q*)" (TLP 4.442), que se trata da função de verdade "$p \supset q$". Nesse caso, "$p \supset q$" possui três fundamentos de verdade [(VV), (FV), (FF)] e suas condições de verdade são (VVFV).

A particularidade das tabelas de verdade propostas por Wittgenstein em relação aos modelos que encontramos nos atuais manuais de lógica é que elas aparecem no *Tractatus* entres aspas e não apresentam a proposição no topo da coluna da direita. Isso quer significar que: i) elas não definem os conectivos proposicionais, ii) elas não especificam as condições de verdade de proposições moleculares, e iii) elas são signos proposicionais que expressam proposições moleculares sem recorrer a constantes (como chama Wittgenstein), ou conectivos, ou operadores lógicos. O que institui uma tabela de verdade como sinal proposicional é o conjunto de regras por meio das quais a disposição espacial de seus constituintes remete ao conjunto das relações internas entre as várias possibilidades, elementares e moleculares, envolvidas na definição do sentido proposicional. Essas regras definem a estrutura sintática da tabela enquanto símbolo e é tal estrutura que simboliza, sendo que tudo mais é logicamente irrelevante. A tabela é a própria estrutura interna da possibilidade molecular e, nessa medida, uma vez feita sinal proposicional, é uma figuração lógica de seu sentido. É uma figuração lógica (TLP 4.03) porque representa um estado de coisas possível. Ela não precisa ser verdadeira, o estado de coisas não precisa existir para ela ter sentido. Sendo a proposição, por exemplo, falsa, ela representa um "fato inexistente" (LANDIM FILHO, 1979, p. 45) ou negativo.

As tabelas de verdade surgem da evolução do pensamento de Wittgenstein ao buscar uma alternativa à notação vero-funcional de Frege e Russell, uma vez que ele identificou que, em tal notação, sentenças que haviam sido tratadas como distintas constituem um só símbolo. Frege e Russell apresentaram maneiras alternativas de escrever uma mesma proposição[6]. O primeiro caminho proposto à notação vero-funcional de Frege e Russell foi a "notação *ab*".

Em *Notas sobre Lógica* (NL), Wittgenstein diz em que consiste tal notação:

> Tal como as funções ab das proposições atomísticas são proposições bipolares, podemos também executar operações *ab* sobre elas. Ao fazê-lo, devemos correlacionar dois novos polos exteriores mediante os antigos polos exteriores com os polos das proposições atômicas (NL, 1913, p. 139).

Isso se dá da seguinte maneira: uma proposição "*p*" é escrita como "a-*p*-b" e sua negação, isto é, "~*p*" é escrita como "b-a-*p*-b-a", sendo que *a* e *b* são os dois polos da proposição. O símbolo "a-b-a-*p*-b-a-b" é o "~~*p*", que é idêntico a "a-*p*-b", isto é, "*p*". Segundo Wittgenstein, "é, pois, exequível construir todas as funções *ab* possíveis, executando repetidamente uma operação *ab*, e podemos, portanto, falar de todas as funções *ab* como de todas aquelas funções que se podem obter, executando repetidamente esta operação *ab*" (NL, 1913, p. 139).

Wittgenstein buscou estender a aplicação da notação *ab* para os quantificadores.

> A aplicação da notação *ab* a proposições de variáveis aparentes torna-se clara se considerarmos que, por exemplo, a proposição "para todo o x, ϕx" deverá ser verdadeira, quando ϕx for verdadeira para todos os x e falsa quando ϕx for falsa para alguns x. Vemos que *alguns* e *todos* ocorrem simultaneamente na própria notação de variável aparente.
> A notação é:
> para (x)ϕx: a-(x)-a-ϕx-b-(∃x)-b
> para (∃x)ϕx: a-(∃x)-a-ϕx-b-(x)-b
> As antigas definições tornam-se agora tautológicas (NL, 1913, p. 141).

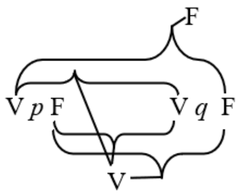
Como se vê, "a-(x)-a-ϕx-b-(∃x)-b" corresponde a "(x)ϕx" e "a-(∃x)-a-ϕx-b-(x)-b" corresponde a "(∃x)ϕx". A notação de negação interna se dá pela reversão dos polos *ab* internos, assim simbolizada ("(x)~ϕx"). E a notação de negação externa pela reversão dos polos *ab* externos, assim simbolizada ("~(x)ϕx"). A simbolização para quantificadores mostra que os argumentos dos quantificadores são

[6] Não trataremos dessa questão em pormenores, visto não ser esse o objeto do presente texto.

REVISTA Peri
v. 14 n. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

proposições dotadas de sentido, pois possuem dois polos, e não nomes de funções de primeiro nível, como queria Frege. É por isso que “as antigas definições tornam-se agora tautológicas”.

O segundo caminho proposto por Wittgenstein à notação vero-funcional de Frege e Russell foi uma variação bidimensional da variação ab que, segundo ele, pode exibir as conexões entre os polos de proposições moleculares e das atômicas que as constituem. Esse procedimento é apresentado em uma carta endereçada a Russell entre novembro e dezembro de 1913. Segundo Wittgenstein, trata-se de um procedimento que permite distinguir tautologias, contradições e contingências; ele é retomado no aforismo 6.1203 do Tractatus. Veja como representar, por meio deste artifício, a implicação material (“p ⊃ q”) do TLP 4.442, apresentada acima:




Aqui, segundo Wittgenstein, a notação é a que se segue: “V *p* F” e “V *q* F” é usado ao invés de “*p*” e “*q*”. Por meio das chaves, exprimem-se as combinações de verdade e, por meio dos traços, a coordenação da verdade ou falsidade da proposição como um todo às combinações de verdade. Com esse procedimento é possível reconhecer uma tautologia como tal (TLP 6.1203).

No processo evolutivo do cálculo proposicional proposto por Wittgenstein, a notação *ab* acaba por ceder lugar às tabelas de verdade (TLP 4.27-4.45; 5.101), que são nada mais do que uma operação de verdade que recorre ao procedimento de cálculo de uma série formal, cujo caráter recursivo garante que os sinais linguísticos possam ser aplicados de modo reiterado a um resultado (TLP 5.23).

### 1.1 As operações de verdade

O entendimento que subjaz à noção de cálculo proposicional requer o entendimento das regras de uso dos cinco operadores lógicos, aqui apresentados como nos atuais manuais de lógica, que são a negação (~), a conjunção (∧), a disjunção (∨), a implicação material (→) e a bi-implicação (↔). A proposta de introduzir o cálculo desses operadores aqui é a da necessidade de demonstrar que a aplicação deles é parte de um procedimento de cálculo de séries formais por meio de duas fórmulas dadas por Wittgenstein no *Tractatus* e que serão trabalhadas adiante. O emprego dos operadores propõe dar conta de como se forma uma proposição complexa a partir de proposições elementares

REVISTA Peri
V. 14 N. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

sem que ocorra acréscimo em termos de conteúdo representacional à proposição complexa que resultar, pois o sinal de cada operador não significa objetos, mas a aplicação de uma operação.

A *negação* ("não") tem o seu uso extensível a outros modos de expressão, como "não é verdade que", "é falso que" ou por prefixos como "in-", "a-", etc. A negação de todo enunciado verdadeiro é falsa. Assim, em uma sentença como "Ruth Barcan é filósofa" (*p*), podemos formar sua negação, dizendo "Ruth Barcan não é filósofa" (~*p*), que pode ser representada por uma tabela de verdade bem simples.

| ***p*** | **~*p*** |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Diferentemente da crença de que negar uma proposição é apenas fazer uma operação sobre ela, isto é, construir uma proposição a partir outra (TLP 5.23), uma negação é uma operação aplicada a uma estrutura proposicional cujo resultado é uma proposição complexa. Por isso, a negação é uma operação de verdade. O resultado dessa operação redunda numa função de verdade, cuja determinação do seu valor de verdade é dada a partir da determinação do valor de verdade de sua proposição componente (TLP 5.234). A aplicação dessa operação envolve uma propriedade formal relativa à regra aplicada, que é a própria aplicação da regra, pois ela não envolve possibilidades combinatórias entre nomes. Trata-se de uma operação que tem um sentido determinado, visto que ela se dá sempre da base para o resultado e possui um caráter recursivo que gera uma série formal: "*p*", "~*p*" "~~*p*", "~~~*p*", "~~~~*p*".

Para o segundo caso, temos uma operação que envolve mais de uma proposição elementar. Nela, dois *conjuntivos* se combinam resultando em uma *conjunção.* O resultado de uma conjunção será verdadeiro quando seu antecedente e o seu consequente são verdadeiros ao mesmo tempo. Nos demais casos, será falso. Na sentença "Ruth Barcan é filósofa e Ruth Barcan é matemática", substituindo as proposições elementares pelas constantes de individuais *p* e *q*, obtemos, a partir da aplicação da fórmula $2^n$, quatro valores de verdade. Representando as possibilidades de verdade de uma conjunção pelos valores de verdade dos seus conjuntivos, temos a seguinte tabela de verdade:

| ***p*** | ***q*** | ***p∧q*** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |
| V | F | F |
| F | F | F |

Uma vez que as operações têm o caráter recursivo, pode-se aplicar novamente uma conjunção para se obter um novo resultado. Em toda operação cujo caráter é recursivo, a recursividade é absorvida por todos os elementos da operação resultante. Dessa forma, a conjunção, por ser também recursiva, possui propriedades *comutativas* $((p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p))$, *associativas* $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$, *distributivas* $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, além de estar envolvida com as *Leis de De Morgan* $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ e $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

Na operação de *disjunção* (ou alternação), os disjuntivos são operados com o uso do "ou", que é simbolizado pelo operador "$\vee$" colocado entre duas proposições elementares. Uma disjunção só será falsa se os dois disjuntivos forem falsos.

Considerando duas formas de interpretação, a disjunção pode ser concebida como *inclusiva* e *exclusiva*. Na primeira forma, pode-se dizer que "uma disjunção inclusiva é verdadeira se um dos disjuntivos ou ambos são verdadeiros. Somente no caso de ambos serem falsos a disjunção inclusiva será falsa. O 'ou' inclusivo tem sentido de 'um ou outro, possivelmente ambos'" (COPI, 1978, p. 229) – "ou chove ou faz sol: normalmente temos uma coisa, ou outra – mas, às vezes, acontece de termos as duas coisas ao mesmo tempo" (MORTARI, 2001, p. 134-135). Na segunda forma, a disjunção exclusiva afirma que pelo menos um dos enunciados é verdadeiro, mas não ambos são verdadeiros, ou seja, ou uma coisa, ou outra. Por exemplo, ou "Leibniz é inventor do cálculo ou Newton é inventor do cálculo". Na disjunção exclusiva, uma alternativa deve *excluir* a outra. Se os dois disjuntivos forem verdadeiros, a disjunção será falsa.

O cálculo proposicional lida com a disjunção inclusiva[7]. Em virtude disso, o resultado de "Leibniz é inventor do cálculo ou Newton é inventor do cálculo", sendo ambas proposições elementares verdadeiras ou apenas uma, será sempre verdadeiro. O resultado só será falso se as duas proposições elementares forem falsas, como representado pela seguinte tabela:

| ***p*** | ***q*** | ***p∨q*** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| V | F | V |
| F | F | F |

[7] "A disjunção exclusiva não faz habitualmente parte dos sistemas de lógica de primeira ordem, pois uma proposição $p \vee q$ é rigorosamente equivalente a $p \leftrightarrow \sim q$" (BRANQUINHO; MURCHO; GOMES, 2006, p. 264).

O caráter recursivo da disjunção manifesta-se em fórmulas como as da *idempotência da disjunção* $(p \vee p) \leftrightarrow p$, da *comutatividade da disjunção* $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$, da *associatividade da disjunção* $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ e do *silogismo disjuntivo* $((p \vee q) \wedge {\sim}p) \rightarrow q$.

A implicação material é outra operação do cálculo proposicional e é conhecida como *operação condicional* ("se *p*, então *q*"), representada pelo operador "→" ou "⊃". A operação da implicação material pressupõe que o resultado do cálculo só será falso no caso em que o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso, o que parece ser óbvio, pois é de se esperar que se afirmamos que *p* implica *q*, negamos a possibilidade de que *p* seja verdadeira e *q*, falsa. O resultado da operação de uma implicação material por meio de uma tabela de verdade é o que se segue:

| ***p*** | ***q*** | ***p→q*** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |

Um condicional é verdadeiro sob aquelas atribuições de valores às suas proposições elementares em que seu antecedente é falso e seu consequente é verdadeiro ou falso, e sob aquelas em que seu consequente é verdadeiro e seu antecedente é verdadeiro ou falso. O condicional $p \rightarrow q$ possui três fundamentos de verdade, ou seja, é verdadeiro sob essas atribuições de valores: na primeira, na segunda e na última linhas de valores da tabela acima.

A implicação material levanta problemas interessantes para a lógica quando do entendimento do conteúdo semântico dos enunciados do antecedente, do consequente e do resultado da operação[8]. Parece ser contraintuitivo, por exemplo, conceber que uma operação na qual o antecedente e o consequente sejam falsos tenha um resultado verdadeiro. Ao dizer, por exemplo, "se a Terra é quadrada, então, Marte é gasoso" não nos parece que obtivemos um resultado legítimo de uma operação condicional, afinal, em tal argumento a conclusão parece não proceder da premissa, além de ter duas asserções falsas. Entretanto, diz-se que a razão para a lógica clássica admitir a operação condicional como acima apresentada deve-se ao fato de que assim é mais adequado trabalhá-la na matemática. Na verdade, a solução para a operação condicional é bastante simples: basta admitir que $p \rightarrow q$ equivale a ${\sim}(p \wedge {\sim}q)$, isto é, temos $p \rightarrow q$ *se não é possível que tenhamos p verdadeira e q falsa*.

[8] Para uma boa discussão os problemas filosóficos e epistemológicos proporcionados pela implicação material, eis uma indicação: SIMÕES, E.; CORRÊA, V. M.; SANTOS, W. R. "Sobre a importância e abrangência da análise das proposições condicionais na história da lógica". *Investigação Filosófica*, v. 11, n. 3, p. 95-114, 2020.

A operação condicional entre duas proposições elementares distintas equivale ao princípio da não-contradição.

O caráter recursivo da implicação material se dá, por exemplo, em fórmulas como a *contraposição* $(p\to q) \leftrightarrow (\sim q\to\sim p)$, *modus ponens* $(p\wedge(p\to q) \to q$, *modus tollens* $(\sim q\wedge(p\to q)) \to \sim p$, *silogismo hipotético* $((p\vee q) \wedge (q\to r) \to (p\to r)$, *lei de Peirce* $((p\to q)\to p) \to p$ e a *lei de Duns Scot* $\sim p \to (p\to q)$.

A bi-implicação, por outro lado, representada pelo operador de equivalência (↔), corresponde à implicação nas duas direções: $p\to q$ e $q\to p$. O enunciado dessa operação é "se e somente se" e o seu resultado na tabela de verdade é o que se segue:

| ***p*** | ***q*** | ***p↔q*** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |
| V | F | F |
| F | F | V |

Se *p* equivale a *q,* elas têm o mesmo valor e o resultado da operação na tabela de verdade deverá apresentar V nas linhas onde os valores de verdade forem iguais, isto é, na primeira e quarta linhas. Nos demais casos, visto que os valores são diferentes e, portanto, não se equivalem, o valor será F. O caráter recursivo da equivalência pode ser expresso em operações como as da *associatividade da equivalência* $(p \leftrightarrow (q\leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p\leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$ e da *comutividade da equivalência* $(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow (q\leftrightarrow p)$.

O resultado de uma operação de verdade por meio de uma tabela torna-se, portanto, intuitivo: dada a combinação de valores das proposições elementares é possível inferir o valor das proposições complexas pelo uso de operadores que as coligem. Na operação, basta separar as proposições elementares e delegar-lhes uma constante individual, um símbolo que lhes represente, como vimos anteriormente. Dada a simbolização das proposições elementares por constantes individuais e tendo ciência de como se usa os conectivos, emprega-se a fórmula $2^n$ para se ter as possibilidades de valores de verdade a partir das proposições. Distribuem-se, portanto, as possibilidades de V e F de acordo com as probabilidades de elas se combinarem para, enfim, aplicar o cálculo dos operadores para cada proposição de acordo com as regras supramencionadas. O resultado da operação será assegurado válido quando uma única linha da tabela for toda verdadeira. As constantes individuais (*p*, *q*, *r*, *s*) serão argumentos de verdade da tabela, as possibilidades de que elas sejam V ou F são as possibilidades de verdade e a coluna vertical, resultado da operação pretendida, apresenta as condições de verdade que podem, ao final, apresentar uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

## 2 O recurso ao cálculo no *Tractatus*

Como se viu, cada tabela de verdade é resultado da aplicação da operação sobre funções de verdade, cuja determinação do valor de verdade é dada a partir da determinação do valor de verdade de sua proposição componente (TLP 5.234). Como se trata de uma operação de verdade, significa que o seu caráter recursivo está assegurado, devido à possibilidade de operações serem aplicadas de modo reiterado a um resultado.

A recursividade é uma propriedade de estruturas que permite a solução de um problema a partir da solução das partes menores deste problema, elementares e mais simples de serem solucionadas. No caso das proposições moleculares (complexas), pode-se chegar às condições de verdade a partir da recorrente aplicação das possibilidades de verdade das proposições atômicas (elementares) que as compõem. A estrutura recursiva do cálculo proposicional permite calcular a função de verdade colecionando os resultados de sua aplicação de forma recorrente em todas as instâncias atômicas onde o resultado do cálculo anterior pode ser usado para calcular uma instância mais complexa.

No *Tractatus* as possibilidades de verdade são calculadas aplicando a função que tem dois resultados (V, F) no conjunto de argumentos de verdade. Os argumentos, ou proposições elementares, são a base desse cálculo. Para obter o resultado das condições de verdade, aplica-se a mesma função no resultado do cálculo anterior, ou seja, aplicando a mesma função no conjunto de possibilidades de verdade, recorrendo à base do cálculo, obtêm-se as condições de verdade. A aplicação reiterada ou recorrente da função tem garantia do resultado sempre estar relacionado com a base. Para a garantia da operação, faz-se necessário, portanto, a existência da proposição elementar à qual se aplica a operação pela primeira vez – chamada de base da operação –, que pode ser composta por mais proposições até atingir a proposição resultante – o resultado da operação. Como a base está presente tanto no começo quanto no final da operação, então ela é comum a ambos (TLP 5.24). A fixação da base se dá por enumeração direta “$(p,q)$”, por especificação da função $fx$ que atua sobre um conjunto de proposições “$\{f\text{a}, f\text{b}, f\text{c}, f\text{d},...\}$” e pela especificação de uma lei formal (TLP 5.501).

No caso das tabelas de verdade, como se tem um número finito de proposições, pode-se definir a base por meio de enumeração direta. No caso de “$p\rightarrow q$”, por exemplo, a base da operação será “$(p,q)$”. Sendo assim, “se ‘$(p,q)$’ é um membro da série, ‘$p\rightarrow q$’ também é um membro da série”.

Pode-se também decidir pela especificação da função $fx$ para determinar a relação entre os elementos do par ‹*x,y*›. Dados um conjunto A e um conjunto B, uma função é a relação entre os elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B, representada por $f: A \rightarrow B; f(x) = \mathrm{y}$, onde $x \in$ A e $y \in$ B. Ocorre nela que cada elemento *x* do conjunto A tenha apenas um corresponde *y* no conjunto B. Caso haja uma relação entre os elementos de A e B que não obedeça a essa premissa, não se pode chamá-la de função. Quando todos os elementos *x* do conjunto A têm sempre o mesmo *y* do conjunto B diz-se que a função é constante. Para os casos onde $f: A \rightarrow B;\ f(x) = \mathrm{y}$ e $f: B \rightarrow A; f(y) = x$ ocorrem simultaneamente, temos uma função bijetora; isso quer significar que houve ali uma correspondência biunívoca, tal como preconiza o *Tractatus* (TLP 3.21). Nesse caso, a consequência do entendimento do uso da base $fx$ é que a aplicação de $f$ a algum elemento $x \in$ A é representada por $f$(x). Assim, representamos o fato de que *y* é a imagem de *x* pela função $f$ escrevendo $f$(x)=*y*.

Tanto "$p \rightarrow q$" quanto a sua respectiva tabela são sinais proposicionais. As tabelas de verdade, nesse caso, representam um sinal proposicional "logicamente privilegiado", pois dispõem espacialmente a estrutura interna de uma possibilidade molecular, sem requerer nada mais que a indicação do modo como as condições de verdade da proposição se definem em termos das condições de verdade das proposições elementares.

Como se verá, tais tabelas são a consequência da aplicação de duas fórmulas matemáticas propostas por Wittgenstein no *Tractatus*, a saber, $K_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v}$ e $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{K}_n} \binom{\mathrm{K}_n}{\mathrm{k}} = L_n$

Os fins da aplicação das equações no *Tractatus* são:

a) calcular o número combinatório fixo de possibilidades de verdade, as possibilidades para *n* proposições elementares (correspondendo a *n* estados de coisas);

b) calcular o número de proposições moleculares do número de possibilidades de verdade.

Quanto à primeira fórmula diz Wittgenstein: "Quanto à existência e inexistência de *n* estados de coisas, há $K_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v}$ possibilidades" (TLP 4.27).

Para se entender a linguagem da equação, faz-se necessário identificar cada elemento que a constitui e extrair o conceito que lhe subjaz. Trata-se de uma fórmula para o cálculo dos estados de coisas, e a equação tem quatro elementos:

$$\mathrm{K}_n(1) = (2) \sum_{v=0}^{n} (3) \binom{n}{v} (4)$$

O elemento (1) representa a quantidade de estados de coisas dentro de um conjunto com *n* proposições elementares. O elemento (2) é o operador matemático que iguala os dois lados da equação

ISSN 2175-1811

– isso significa que qualquer alteração que é feita de um lado deve ser feita do outro. O elemento (3) é o operador matemático que soma todos os resultados da função a ele associada, obedecendo a um intervalo que, nesse caso, também é o domínio dessa função. O domínio deve ser entendido aqui como um conjunto de elementos (ou valores) para os quais a função é válida. O elemento (4) é a função combinação simples. O valor de $\upsilon$ variará dentro do intervalo proposto pelo somatório e a fórmula é calculada reiteradamente até que se esgote todos os números naturais dentro do intervalo, ou seja, até que $\upsilon$ seja igual a $n$. Cada um dos $(n+1)$ resultados da combinação serão somados pelo operador (3) em todo o intervalo dado e associado através do operador (2) ao elemento (1).

> O número $K_n$ significa que, para $n$ estados de coisas, existem – se calcularmos a fórmula dada – $2^n$ possibilidades para a distribuição da obtenção ou não obtenção dos estados de coisas. Ao mesmo tempo, isso determina $2^n$ possibilidades de verdade da combinação correspondente de ser verdadeira ou falsa (PILCH, 2017, p. 30).

As duas fórmulas matemáticas das quais Wittgenstein lança mão são equações de somatório de números binomiais, ou coeficientes binomiais, de uma distribuição binomial. A distribuição binomial é uma ferramenta estatística considerada quando um experimento deve ser repetido um número “*n*” finito de vezes de forma independente, isto é, o resultado de um evento não interfere no resultado dos eventos sucessivos. O resultado de cada um desses eventos do experimento é uma variável discreta que pode assumir exclusivamente dois valores, “sucesso” ou “fracasso”, e suas probabilidades (de sucesso ou fracasso) são complementares e constantes durante o experimento.

Experimentos dessa natureza determinam por exemplo a quantidade de ocorrências de “*k*” sucessos (ou fracassos) em “*n*” tentativas sucessivas. A notação que representa esse cálculo é o coeficiente binomial ou número binomial:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

O coeficiente binomial representa o que chamamos na estatística aplicada de combinação simples, ou seja, quando precisamos determinar a quantidade de vezes que se obtém o “*k*” dentro de “*n*” sucessivas tentativas independentes. É importante observar que o valor de “*n*” é sempre maior ou igual ao valor de “*k*”.

Dentre as mais diversas aplicações da combinação simples, está a de formação de grupos menores a partir de um grupo maior, onde nesse caso, o grupo formado não precisa que seus elementos estejam em uma determinada ordem: quantos grupos diferentes de 3 pessoas pode-se formar com um grupo de 10 pessoas?

$$C_{10,3} = \binom{10}{3}$$

REVISTA Peri
v.14 n.01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

Em Wittgenstein, a necessidade é obter a quantidade de vezes em que *n* proposições são verdadeiras (ou falsas) dente *n* proposições dadas. Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira. Usemos a notação de coeficiente binomial ou número binomial para representar formalmente a combinação simples:

$$C_{n,\upsilon} = \binom{n}{\upsilon}$$

Dado um *Espaço amostral* S = $\{p, q, r\}$, as várias combinações possíveis com os eventos que ali estão contidos, sem que haja repetições de eventos, são oito (8). Cada uma é um subconjunto de S: $\{\ \}$; $\{p\}$; $\{q\}$; $\{r\}$; $\{p, q\}$; $\{p, r\}$; $\{q, r\}$; $\{p, q, r\}$. Cada um desses subconjuntos é um estado dos eventos do *Espaço amostral* S. A possibilidade de existência de *n* = 3 estados de coisas *distintos* e *independentes* ou eventos é a quantidade de subconjuntos do *Espaço amostral*. As 8 (oito) combinações são distribuídas em função de seu estado, caracterizado pela variável $\upsilon$ da fórmula, ou seja, cada combinação é a contagem de subconjuntos que podem estar neste estado υ, conforme demonstraremos a seguir: 1 (uma) combinação, ou estado, onde não há ocorrência de nenhum evento ($n$ = 3 e $\upsilon$ = 0); 3 (três) estados em que ocorrem apenas um dos eventos ($n$ = 3 e $\upsilon$ = 1), 3 (três) possibilidades de ocorrer um par qualquer dos eventos ($n$ = 3 e $\upsilon$ = 2) e; 1 (uma) em que ocorrem todos os três eventos ($n$ = 3 e $\upsilon$ = 3), conforme ilustrado no modelo abaixo.

| Qtd. de Eventos | Espaço Amostral ***S*** | Combinações $\binom{n}{\upsilon}$, onde: $0 \leq \upsilon \leq n$ | | Valor de *n* | | | | | | Somatório $\sum_{\upsilon=0}^{n} \binom{n}{\upsilon}$ | Valor $K_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Para *n*=0 | $\{\ \}$ | $\binom{0}{0}$ | 1 | ***0*** | | | | | | 1 | 1 |
| Para *n*=1 | $\{p\}$ | $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ | 1 | ***1*** | | | | | | 1+1 | 2 |
| Para *n*=2 | $\{p, q\}$ | $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ | 1 | ***2*** | 1 | | | | | 1+2+1 | 4 |
| Para *n*=3 | $\{p, q, r\}$ | $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$ | 1 | ***3*** | 3 | 1 | | | | 1+3+3+1 | 8 |
| Para *n*=4 | $\{p, q, r, s\}$ | $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$ | 1 | ***4*** | 6 | 4 | 1 | | | 1+4+6+4+1 | 16 |
| Para *n*=5 | $\{p, q, r, s, t\}$ | $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$ | 1 | ***5*** | 10 | 10 | 5 | 1 | | 1+5+10+10+5+1 | 32 |
| Para *n* | $\{p, q, r, s,\ldots\}$ | $\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ $\binom{n}{\ldots}$ $\binom{n}{\ldots}$ $\binom{n}{n-1}$ $\binom{n}{n}$ | 1 | ***n*** | ... | ... | ... | *n* | 1 | 1+*n*+...+...+...+*n*+1 | $\mathbf{2^n}$ |

REVISTA Peri
v.14 n.01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

Sempre que tivermos uma combinação onde $\upsilon = 0$, teremos apenas um conjunto vazio, o que valida a recursividade da combinação em relação ao conceito de $0! = 1$, que possibilita o cálculo da combinação $C_{n,0} = \binom{n}{0}$ que, neste caso, sempre vai ser um (1), definido assim inclusive quando $n$=0.

O somatório de cada linha numérica da tabela acima é uma função da quantidade de elementos do conjunto S, ou seja, está em função de $n$. Para: $n = 0$, $\sum = 1$; $n = 1$, $\sum = 2$; $n = 2$, $\sum = 4$; $n = 3$, $\sum = 8$; $n = 4$, $\sum = 16$, e assim sucessivamente. Usando pares ordenados $(n, K_n)$ para determinar a função que soma cada linha, temos:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(n) & = & K_n & \quad & f(2) & = & 4 \\ f(0) & = & 1 & & f(3) & = & 8 \\ f(1) & = & 2 & & f(4) & = & 16 \end{array}$$

Onde:

$n$ = o número de proposições elementares;

$K_n$ = somatório dos resultados dos coeficientes da linha $n$.

Nota-se a recursividade das funções, devido à possibilidade da aplicação de modo reiterado da função $f(0) = 1$:

a) $f(3) = 2\text{x}f(2); sendo f(2) = 2\text{x}f(1);$
b) $f(3) = 2\text{x}2\text{x}f(1); sendo f(1) = 2\text{x}f(0);$
c) $f(3) = 2\text{x}2\text{x}2\text{x}f(0); sendo f(0) = 1.$

As funções de verdade, nesse caso, são a contraface das funções exponenciais na matemática. Vejamos o exemplo do argumento $((p \wedge q) \rightarrow r)$. Eis sua tabela de verdade:

| $X_1$ **p** | $X_2$ **q** | $X_3$ **r** | $X_4$ $((p \wedge q) \rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | V | F | F |
| V | F | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | V | V |
| F | V | F | V |
| F | F | V | V |
| F | F | F | V |

Para o argumento $((p \wedge q) \rightarrow r)$, temos a função $f$ definida por $X_4 = f(X_1, X_2, X_3)$ da seguinte forma $(X_1, X_2, X_3) \in \{V,F\}^3 \rightarrow X_4 = f(X_1, X_2, X_3) \in \{V,F\}$ com a descrição que se segue da tabela de verdade:

| | |
|---|---|
| $f$(VVV) = V | $f$(FVV) = V |
| $f$(VVF) = F | $f$(FVF) = V |
| $f$(VFV) = V | $f$(FFV) = V |
| $f$(VFF) = V | $f$(FFF) = V |

A exponenciação $2^n$ se evidencia pelo procedimento aplicado, isto é, se se tem $f(3)$, vê-se que 2x2x2 = 8. Isso significa que o número de multiplicações do fator 2 é igual ao número de proposições elementares $n$:

$d)\ f(3) = 2^3 = 8\,;$

$e)$ ➔ $f(n) = 2^n$

$f)\ K_n = 2^n$

O que redunda na seguinte fórmula (TLP 4.27):

$$K_n = f(n) = \sum_{\upsilon=0}^{n} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{\upsilon}} = 2^n, \{n, \mathrm{K}_n, \upsilon\} \in N$$

Para a segunda fórmula que diz que “quanto à concordância e discordância de uma proposição com as possibilidades de verdade de n proposições elementares, há $\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{K_n}} \binom{\mathrm{K_n}}{\mathrm{k}} = L_{\mathrm{n}}$ possibilidades” (TLP 4.42), o entendimento é análogo, porém, a extensão, o tamanho ou a quantidade de proposições é dado por $\mathrm{K}_n$, em contraposição à fórmula anterior onde era dada por $n$. $\mathrm{K}_n$ e $n$ são também o intervalo superior do somatório. O resultado da segunda equação é derivado do resultado da primeira, ou seja, o valor de uma está diretamente associado ao valor da outra como um par ordenado, sempre que $K_n$ for $x_1$, $L_n$ vai ser $y_1$. A notação dessa fórmula matemática, portanto, é a que se segue:

a) $K_n$ = quantidade de estados de coisas de um dado conjunto com $n$ proposições elementares. A primeira fórmula calcula o valor de $\mathrm{K}_n$ que será usado recursivamente para o cálculo da segunda, que calcula o valor de $\mathrm{L}_n$;

b) $L_n$ = quantidade de possibilidades de verdade dentro de um conjunto com $\mathrm{K}_n$ estados de coisas. O valor de $L_n$é derivado de $K_n$ que, por sua vez, é derivado de $n$. Notemos aqui a recursividade em relação a $n$, ou seja, pode-se escrever tudo em função apenas de $n$;

c) $\sum_i^f \binom{n}{k}$= notação matemática usada para calcular a soma dos resultados de $\binom{n}{k}$, com k variando de $i$ a $f$;

d) $\binom{n}{k}$ = notação matemática usada para calcular a quantidade de combinações simples de *n* elementos tomados *k* a *k*. Com*:* $0 \leq k \leq n$.

Dos quatro elementos das equações, *um* é o valor que se quer calcular, *dois* são os operadores e *um* é uma função. A função combinação conta o número de ocorrências de uma combinação de elementos de um dado conjunto finito; no caso em questão, de um conjunto de proposições elementares. Mas pode ser de qualquer conjunto enumerável ou contável, ou seja, de um conjunto em que se possa associar cada elemento a um elemento dos números naturais; um conjunto do qual se possa enumerar, contar e ordenar os elementos.

Como é usada uma função da análise combinatória (uma combinação simples), temos que entender qual a relação entre os estados de coisas representados pelas proposições elementares {*p, q, r,...*}, com os valores numéricos {1, 2, 3,...} usados para o cálculo da fórmula. O resultado numérico das fórmulas de Wittgenstein são as coleções de combinações de condições de existência (de estados de coisas) e de combinações de condições de verdade (concordância e discordância de uma proposição com as possibilidades de verdade), a partir das condições de existência. Ao se calcularem as fórmulas, obtém-se a contagem de: i) todas as condições de existência das proposições elementares {*p, q, r, ...*}, isto é, o espaço de estados[9], onde um modelo de mundo de *n Sachverhalte* (estados de coisas) implica $2^n$ distribuições possíveis de cada atribuição; ii) todas as circunstâncias em que as condições de existência podem ou não ser verdadeiras (ou falsas), isto é, o espaço proposicional onde o número de proposições moleculares é calculado pelo número de possibilidades de verdade – $2^{2^n}$ proposições moleculares por *n* proposições elementares. Esse procedimento numérico permite mapear ou distribuir matematicamente qualquer condição de verdade a partir da ciência de qualquer condição de existência das proposições elementares. Trata-se, nos dois casos, de uma contagem finita de condições a partir de um dado conjunto finito de proposições, elementares ou moleculares, cuidadosamente ordenadas.

## 2.1 Os recursos de combinação e probabilidade

A análise combinatória é muito usada por estudiosos de probabilidade e lógica, por permitir trabalhar com grupos de eventos que estão diretamente relacionados com a contagem, e o que

[9] Proporemos aqui uma noção de Martin Pilch (2017), que, para o entendimento da estrutura do espaço lógico do *Tractatus,* sugere um esquema que divide tal espaço em três: espaço de parâmetro, espaço de estados e espaço proposicional. É do entendimento de como tais espaços funcionam que se propõe entender a noção wittgensteiniana de espaço lógico no todo.

Wittgenstein faz é trabalhar com esse recurso, que ele conhecia muito bem enquanto engenheiro mecânico, para calcular as condições de possibilidade de existência e inexistência de estados de coisas, bem como para tratar da concordância e discordância de uma proposição com as possibilidades de verdade de *n* proposições elementares.

> Quando consideramos combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, temos agrupamentos de *p* elementos, tomados dentre os *n* elementos disponíveis, que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos, isto é, importa somente quem participa do grupo (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 62-63).

O conjunto dos resultados possíveis de uma etapa de um evento ou fenômeno aleatório, isto é, o conjunto dos diferentes resultados possíveis de ocorrer toda vez que a etapa é lançada, é dado por $S=\{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$, que chamaremos de *Espaço Amostral* S[10], onde o índice *n* é igual à quantidade de elementos do conjunto S. Cada elemento do conjunto S corresponde, então, a um e somente um dos resultados possíveis do evento (ou estado de coisas, ou fato)[11] ou fenômeno aleatório.

É importante reiterar que a partir de um conjunto de fatos atômicos, ou eventos, cada fato é um evento (ou estado de coisas). Os fatos tractarianos têm como base os objetos eternos da obra, objetos estes que estão vinculados aos genuínos nomes da linguagem e que, articulados, formam as proposições elementares, que são a figuração da realidade (TLP 4.01). Essa relação entre lógica e ontologia serve à garantia da figuração, bem como da determinabilidade do sentido proposicional[12], pois o procedimento de relação projetiva é pontual ("Um nome toma o lugar de uma coisa, um outro de uma outra coisa, e estão ligados entre si, e assim o todo representa – como um quadro vivo – o estado de coisas" – TLP 4.0311).

As noções tractarianas de "atômico" e "molecular" também são matemáticas. A matemática considera que todos os subconjuntos de um *Espaço Amostral* S finito sejam também eventos, sendo que o subconjunto que tem apenas um elemento do conjunto S é um evento atômico. Quando se tem mais de um elemento neste subconjunto, tem-se um evento composto ou molecular. O subconjunto vazio { }, que é subconjunto de todos os conjuntos, é entendido como um evento vazio ou em que não houve evento algum.

O quadro abaixo elucidará um evento matemático binário e como se dá a contagem e a combinação de seus resultados. Trata-se do evento de se jogar duas moedas ao mesmo tempo, uma de 1 real e outra de 1 dólar, as quais, a partir de então, serão representadas pelos símbolos *p* e *q*

---

10 Equivalente aqui ao espaço de parâmetros do Pilch (2017).

11 O tratamento que é dado ao termo "evento" aqui é o mesmo que "estado de coisas" ou "fato".

12 A parte ontológica da obra (TLP, 1 - 2.063) não tem a pretensão de tratar de uma descrição efetiva do mundo, trata-se sim de um levantamento das condições que o mundo precisa satisfazer para que a linguagem seja possível.

respectivamente. Ao se jogar as duas moedas, para os resultados possíveis de ocorrência de "Cara" iremos sinalizar com o V. Quando o fato não acontecer, isto é, quando der "Coroa", sinalizaremos com F.

| **Evento**: Jogar 2 Moedas | |
|---|---|
| **Ocorrer Cara** | |
| ***p*** | ***q*** |
| V | V |
| V | F |
| F | V |
| F | F |

Temos então uma contagem total de 4 condições de possibilidade de ocorrência de "Cara" ao jogar as duas moedas simultaneamente. Na linguagem das tabelas de verdade, empregando a fórmula $2^n$, temos 4 possibilidades da combinação correspondente desses estados de coisas de ser verdadeira ou falsa.

Ao transportar a análise desse âmbito para o da proposição, tomemos a proposição molecular "Ruth Barcan é filósofa e Ruth Barcan é matemática" como exemplo. Já havíamos demonstrado, na perspectiva do espaço de estados, a tabela de verdade da conjunção. Aquela tabela demonstrou-nos 4 linhas para as possibilidades de verdade dos estados de coisas serem verdadeiros ou falsos (suas possibilidades de existência ou não existência), pela aplicação da fórmula $2^n$. Verificou-se que se trata de um argumento válido, pela primeira linha da tabela, cujo caráter contingencial ficou evidenciado pelas condições de verdade, mediante a coluna do resultado da operação de verdade. Diante de uma proposição molecular tal como a apresentada acima, o que nos permite calcular a chance de um determinado evento aleatório específico acontecer nesta etapa específica (por exemplo, de "**Ruth Barcan é filósofa**" acontecer, no contexto em que "Ruth Barcan é filósofa e Ruth Barcan é matemática") é a razão entre o tamanho do conjunto de resultados do evento que serão favoráveis e o tamanho do conjunto de todos os resultados possíveis do evento.

Para o exemplo acima, vamos usar as seguintes notações:

a) S = $\{p, q\}$ = {(Ruth Barcan é filósofa), (Ruth Barcan é matemática)} = Espaço Amostral;
b) $S_p$ = {(Ruth Barcan é filósofa, Ruth Barcan é matemática), (Ruth Barcan é filósofa, Ruth Barcan **não** é matemática), (Ruth Barcan **não** é filósofa, Ruth Barcan é matemática), (Ruth Barcan **não** é filósofa, Ruth Barcan **não** é matemática)} = todos os 4 (quatro) eventos possíveis = todos subconjuntos de S;

REVISTA Peri
V. 14 N. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

c) $S_f$ = {(Ruth Barcan é filósofa, Ruth Barcan é matemática), (Ruth Barcan é filósofa, Ruth Barcan **não** é matemática)} = conjunto de eventos favoráveis.

A probabilidade (P) de um evento específico acontecer, por exemplo, de "Ruth Barcan é filósofa" acontecer, no contexto da conjunção acima, é igual à razão entre $n_f$ (número de elementos do conjunto $S_f$) e o número de elementos $n_p$ (número de elementos do conjunto $S_p$). Sendo assim, a probabilidade (P) de "Ruth Barcan é filósofa" acontecer (evento favorável) é $n_f = 2$ dividido por $n_p = 4$, ou seja, P = 2 / 4, isto é, *uma* chance a cada *duas* possibilidades de verdade ou em 50% das possibilidades.

Tal como é possível analisar em termos de probabilidade as possibilidades de que dê "Cara" ao lançar as duas moedas, ou analisar que de uma função binária como *p.q* é possível extrair suas possibilidades de verdade, também é possível averiguar, a partir dos dois argumentos de verdade[13] *p* e *q*, quais são as condições de verdade das proposições moleculares por *n* proposições elementares ($2^{2^n}$), utilizando-se da segunda fórmula apresentada por Wittgenstein no aforismo 2.42 do *Tractatus*.

A fórmula $\sum_{k=0}^{K_n} \binom{K_n}{k} = L_n$ leva a $2^{2^n}$ proposições moleculares por *n* proposições elementares. No aforismo 5.101 do *Tractatus,* Wittgenstein restringe uma demonstração do esquema resultante das proposições por *n* = 2, o que daria o seguinte quadro de distribuição da função binária.

Argumentos de verdade (*n*)[14]

| | | (p⊃p.q⊃q) | | | | | | | (p.~q) ∨ | | | | | | | | (p.~p.q.~q) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **p** | **q** | Taut. | (~(p.q)) | (q⊃p) | (p⊃q) | (p∨q) | (~q) | (~p) | (q.~p) | (p≡q) | p | q | (pIq) | (p.~q) | (q.~p) | (q.p) | Contr. |
| V | V | V | F | V | V | V | F | F | F | V | V | V | F | F | F | V | F |
| F | V | V | V | F | V | V | F | V | V | F | F | V | F | F | V | F | F |
| V | F | V | V | V | F | V | V | F | V | F | V | F | F | V | F | F | F |
| F | F | V | V | V | V | F | V | V | F | V | F | F | V | F | F | F | F |

Possibilidades de verdade ($2^n$)
(as linhas, nesse caso 4)

Condições de verdade ($2^{2^n}$)
(as colunas, nesse caso 16)

O procedimento de Wittgenstein, ao restringir o famigerado "tabelão" (TLP 5.101), tem a seguinte justificativa:

[13] Wittgenstein chama os argumentos de qualquer função de verdade de "argumentos de verdade" (TLP 5.01).

[14] Pilch (2017, p. 31)

A restrição para $n = 2$ é inteligível por causa do aumento rápido dos números, resultante do poder da dupla exponenciação, a qual leva de $n = 4$ para 16 possibilidades de verdade e 65636 diferentes condições de verdade, mas para $n = 8$ temos $2^n = 256$, com o número de $2^{2^n}$ possíveis condições de verdade crescendo para $\approx 10^{77}$ (PILCH, 2017, p. 31).

E o sentido da aplicação das fórmulas de somatório do TLP 4.27 e TLP 4.42 poderia ser assim expresso como forma de elucidação:

$$n = 2$$
$$K_n = 2^n$$
$$2^2 = 4$$
$$L_n = \sum_{K=0}^{K_n} \binom{K_n}{K}$$
$$0 \leq K \leq K_n$$

| Possibilidades de verdade $K_n = 4$ | Argumento de verdade 1 ***p*** | Argumento de verdade 2 ***q*** | **1** (p⊃p.q⊃q) Tautologia | **2** (~(p.q)) | **3** (q⊃p) | **4** (p⊃q) | **5** (p∨q) | **6** (~q) | **7** (~p) | **8** (p.~q) ∨ (q.~p) | **9** (p≡q) | **10** p | **11** q | **12** (pIq) | **13** (p.~q) | **14** (q.~p) | **15** (q.p) | **16** (p.~p.q.~q) Contradição |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | V | V | V | F | V | V | V | F | F | F | V | V | V | F | F | F | V | F |
| **2** | F | V | V | V | F | V | V | F | V | V | F | F | V | F | F | V | F | F |
| **3** | V | F | V | V | V | F | V | V | F | V | F | V | F | F | V | F | F | F |
| **4** | F | F | V | V | V | V | F | V | V | F | V | F | F | V | F | F | F | F |
| Quantidade de condições de verdade | | | 1 | 4 | | | | 6 | | | | | | 4 | | | | 1 |
| Valor de **K** | | | 0 | 1 | | | | 2 | | | | | | 3 | | | | 4 |
| Combinação | | | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | | | | $\binom{4}{2}$ | | | | | | $\binom{4}{3}$ | | | | $\binom{4}{4}$ |

Condições de verdade $L_n = 16$

Como se vê, aqui se trata de funções de verdade binárias sobre as quais é possível calcular probabilisticamente tanto a possibilidade de existência e de inexistência de *n* estados de coisas (TLP 4.27), quanto a concordância e discordância de uma proposição com as possibilidades de verdade de *n* proposições elementares (TLP 4.42). Para tal, duas fórmulas são-nos imprescindíveis: $2^n$, com a qual é possível calcular as possibilidades de existência ou não existência de *n* estados de coisas, e $2^{2^n}$, com a qual é possível calcular a concordância e discordância de uma proposição com as possibilidades de verdade de *n* proposições elementares, a partir dos argumentos de verdade *p* e *q*. Segundo Pilch (2017, p. 31), isso permitiria, inclusive, representar o espaço lógico estruturado em três conjuntos afins: pelo conjunto de *n* proposições elementares, que serão argumentos de verdade, representando o "espaço de parâmetros"; pelo conjunto de possibilidades de verdade, que representa

ISSN 2175-1811

o “espaço de estados”; e pelo conjunto deste conjunto, contendo todas as proposições moleculares possíveis, o “espaço proposicional”, conforme a representação que se segue.

| Espaço de parâmetros | Espaço de Estados | Espaço Proposicional |
|---|---|---|
| $n$ | $2^n$ | $2^{2^n}$ |
| Argumentos de verdade | Possibilidades de verdade | Condições de verdade |
| Estados de coisas | Situações (sentido estrito) | Situações (sentido amplo) |
| Fatos (elementares) | Fatos (sentido estrito) | Fatos (sentido amplo) |
| Proposições elementares | Proposições (moleculares) | Todas as proposições (moleculares) |
| Proposições elementares | Conjunções de proposições elementares | Funções de verdades arbitrárias de proposições elementares |
| Conjunto de todos os estados de coisas independentes | Conjunto de todas as possíveis distribuições (“estados”) dos obtidos e não obtidos estados de coisas | Conjuntos de todos os subconjuntos de “estados” alternativos |

O valor numérico da contagem da tabela de distribuição de funções binárias acima representa a coleção enumerada de todas as possíveis combinações das proposições *p* e *q*.

## 3 Sobre o procedimento de recursividade na lógica proposicional

O procedimento de recursão demonstrado acima permite criar proposições complexas, em termos de proposições simples, previamente definidas, que pertencerão à mesma classe das primeiras. Um exemplo disso na matemática é o conjunto dos números naturais, que é definido a partir de um único número natural (0) e que carrega a propriedade da classe dos números naturais (0, 0+1, 0+1+1, etc.). Assim, cada elemento do conjunto é dado a partir do primeiro. Se um elemento contém a propriedade da classe, os que derivarem dele também a conterão, formando assim o que se chama de conjunto recursivamente enumerável. Essa recursividade, que é uma propriedade interessante do conjunto dos números naturais, passa a ser também uma propriedade das operações de verdade, quando se torna possível que uma bijeção seja feita, a fim de tornar o *Espaço Amostral* S computável.

No caso dos números naturais, os critérios que os restringem e os definem são:

a) o número 0 é natural;

REVISTA Peri
v. 14 n. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

b) todo número natural tem um sucessor $n+1$ e;

c) todo sucessor também é natural desde que $n$ seja natural.

Apenas com $n_0 = 0$ é possível instanciar todos os elementos do conjunto dos números naturais com cardinalidade $n$.

Tal como o conjunto dos números naturais é recursivo, o procedimento de fatoração em matemática também o é – e a elucidação disso aqui é de grande relevância para o entendimento da aplicação das fórmulas do somatório utilizadas por Wittgenstein no *Tractatus*. Quando definimos a equação da fatoração para calcular o valor numérico do fatorial, temos a seguinte fórmula:

$$(n+1)! = n!.(n+1), \forall n \in N \rightarrow 0! = 1$$

A definição (**0! = 1**) acima é o critério de recursividade da fatoração, assim como o número 0 o era para o caso do conjunto dos números naturais. Esta definição deixa consistente o produto entre elementos de um conjunto S qualquer, com $n$ elementos, a partir do momento que é esclarecido o produto vazio, que nada mais é do que o resultado do produto de um fator por nenhum número[15]. O produto vazio acontece quando fazemos uma multiplicação por nenhum número, ou seja, quando um dos fatores é vazio; neste caso, o resultado desse produto é o elemento neutro da multiplicação, isto é, um valor numérico que não altera o valor de toda a operação, mas que faz parte dos fatores da operação como um todo.

Em matemática o número zero (0) pode ser uma quantidade de algo, representar um conjunto vazio ou quantificar o nada. O fatorial quantifica todas as permutações do *Espaço amostral* S. Se o *Espaço amostral* S tem $n = 1$ elemento, tem $P_1 = 1$ permuta. Se tiver $n = 2$ elementos, tem $P_2 = 2$ permutas. Caso tenha $n = 3$, já são $P_3 = 6$. Caso $n = 0$, o *Espaço amostral* S = { } (vazio) tem uma permuta $P_0 = 1$, igual à de um espaço amostral com apenas $n = 1$ elemento.

Em lógica, matemática ou computação, entende-se que uma linguagem recursiva é um subconjunto de uma linguagem formal. A linguagem formal constitui o *Espaço Amostral* e cada uma das linguagens recursivas constitui os subconjuntos desse espaço. O conjunto $S=\{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$ de possíveis resultados de um evento, que tem $n$ elementos, é recursivamente enumerável por ser possível associar cada elemento do conjunto S a um elemento do conjunto dos números naturais $N=\{1, 2, ..., n\}$. A linguagem da função fatorial enumera todas as cadeias válidas com $n$ elementos do *Espaço amostral* S, e, como cada elemento do conjunto S está associado a um número natural, ao acrescentar mais um elemento nesse conjunto S**,** com o possível resultado $r_{(n+1)}$, não há necessidade de repetir todo o processo de validação, basta a partir de $n$ acrescentar mais 1 e verificar se já existe

[15] Não confundir com produto de fator 0, pois neste caso, o fator é um número e o resultado de um produto por 0 é sempre 0 ($n$ .0 = 0).

REVISTA Peri
v. 14 n. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

ocorrência dessa nova cadeia de eventos validada. Como já dito, um subconjunto de um conjunto recursivo também é recursivo, e todo resultado, linguagem ou procedimento com conjuntos recursivos também serão recursivos.

Sobre a recursividade expressa na fórmula do aforismo 4.42 do *Tractatus*, podemos dizer que há um mapeamento ou contagem das possíveis combinações dos eventos que refletem a concordância e discordância de uma proposição com as possibilidades de verdade de *n* proposições, ou melhor, possibilidades de verdade de subconjuntos de proposições dentro de um *Espaço Amostral* S. Dentre essas 16 possibilidades, apresentadas na tabela acima, há a(s) possibilidade(s) de não ocorrer nenhum evento, bem como a de ocorrer 2 ou 3 deles e 1 ou 2 não, por exemplo.

Se tomarmos como exemplo a não ocorrência de estados de coisas (portanto, a discordância dos mesmos com a realidade, isto é, a circunstância de que o cálculo proposicional seja falso (F)), a quantidade de eventos ou de combinações de eventos onde não ocorre nenhum evento F pode ser calculada por[16]:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}, onde\ n = 4, p = 0$$

$$C_{4,0} = \binom{4}{0} = 1$$

$$C_{4,0} = 1$$

| *p* | *q* | *(p→p).(q→q)* |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| V | F | V |
| F | F | V |

Ou seja, existe 1 combinação onde não ocorre nenhum evento F. Trata-se de uma tautologia que, nesse caso, corresponde ao subconjunto vazio do *Espaço Amostral* S – vazio de F. É por isso que Wittgenstein afirma que "a tautologia deixa à realidade todo o – infinito – espaço lógico" (TLP 4.463). O mesmo ocorre com o conjunto vazio. O conjunto vazio é subconjunto de todos os conjuntos, pois a partir dele pode-se compor todos os outros subconjuntos através de recursão enumerada. No exemplo acima, o subconjunto vazio deixa o espaço com todas as possibilidades de concordância equiprováveis.

---

[16] Vale ressaltar que nesse caso, como se trata da concordância ou discordância da proposição com *duas* possibilidades de verdade, o valor de *n* nos cálculos que se seguem é igual a $K_n$.

A quantidade de eventos, ou de combinações de eventos, onde ocorre apenas 1 resultado falso (F) dos 4 eventos pode ser calculada por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}, onde\ n = 4, p = 1$$

$$C_{4,1} = \binom{4}{1} = 4$$

$$C_{4,1} = 4$$

| *p* | *q* | *~(p.q)* | *(q→p)* | *(p→q)* | *(p ∨ q)* |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | V |
| F | V | V | F | V | V |
| V | F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V | F |

Ou seja, existem 4 combinações onde ocorre apenas 1 evento F. Corresponde aos subconjuntos com $n = 1$ (elemento) que foram apresentados por Wittgenstein nas operações acima apresentadas.

A quantidade de eventos, ou de combinações de eventos, onde ocorrem 2 falsidades (F) dos 4 eventos pode ser calculada por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}, onde\ n = 4, p = 2$$

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$$

$$C_{4,2} = 6$$

| *p* | *q* | *~q* | *~p* | *(p.~q)∨(q.~p)* | *(p↔q)* | *p* | *q* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V | V | V |
| F | V | F | V | V | F | F | V |
| V | F | V | F | V | F | V | F |
| F | F | V | V | F | V | F | F |

Aqui Wittgenstein apresenta 6 combinações onde ocorrem 2 eventos falsos (F), conforme a tabela apresentada acima, referente ao “tabelão” de Wittgenstein, e que correspondem aos subconjuntos com $n = 2$ elementos.

Já a quantidade de eventos, ou de combinações de eventos, onde ocorrem 3 resultados falsos (F) dos 4 eventos pode ser calculada por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}, onde\ n = 4, p = 3$$

REVISTA Peri
V. 14 N. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$$

$$C_{4,3} = 4$$

| *p* | *q* | (*p*I*q*) | (*p*.~*q*) | (*q*.~*p*) | (*q*.*p*) |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | V | F |
| V | F | F | V | F | F |
| F | F | V | F | F | F |

Temos aqui 4 combinações onde ocorrem 3 eventos falsos. Correspondem aos subconjuntos com *n* = 3 elementos. Daqui tiramos a ideia de eventos complementares, ou seja, de conjuntos que têm as mesmas quantidades de combinações, porém, com os elementos complementares, neste caso, o evento complementar de cada uma das 4 combinações de $C_{4,3} = 4$ vai ser um evento das 4 combinações de $C_{4,1} = 4$ . Sendo o conjunto S={1, 2, 3, 4} , uma combinação seria o conjunto {1} e seu complemento {2, 3 ,4}.

A quantidade de eventos, ou de combinações de eventos, onde ocorrem 4 falsidades (F) dos 4 eventos pode ser calculada por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}, onde\ n = 4, p = 4$$

$$C_{4,4} = \binom{4}{4} = 1$$

$$C_{4,4} = 1$$

| *p* | *q* | (*p*.~*p*) . (*q*.~*q*) |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | V | F |
| V | F | F |
| F | F | F |

Existe 1 combinação onde os 4 eventos são todos falsos. Aqui temos uma contradição que "preenche todo o espaço lógico e não deixa nenhum ponto à realidade" (TLP 4.463). Trata-se de uma proposição de verdade impossível, pois não representa nenhuma situação possível. Esta operação corresponde ao subconjunto com *n* = 4 elementos.

Os eventos que comporão este *Espaço Amostral* S', de cardinalidade $n' = K_n$, são cada um dos subconjuntos do *Espaço Amostral* S, ou seja, se o conjunto S é composto por *n* eventos distintos e

REVISTA Peri
V. 14 N. 01 2022
FLORIANÓPOLIS/SC - BRASIL
ISSN 2175-1811

independentes, o conjunto S' é composto por $n' = K_n$ eventos. Esses eventos nem sempre são atômicos, isto é, vai ocorrer de elementos do conjunto S' terem mais de um dos eventos do conjunto S.

Contabilizando a contagem de subconjuntos do *Espaço Amostral* S = {*p*, *q*}, onde cada subconjunto representa uma coluna da tabela de verdade, para: $n = 2;\ K_n = 4$, temos:

$$C_{4,0} = 1; C_{4,1} = 4; C_{4,2} = 6; C_{4,3} = 4; C_{4,4} = 1$$

$$f(K_n) = \sum_{K=0}^{K_n} \binom{K_n}{k} = L_n = 2^{K_n} = 2^{2^n}$$

$$\sum_{K=0}^{K_n} \binom{K_n}{K} = \sum_{K=0}^{4} \binom{4}{K}$$

$$\sum_{K=0}^{4} \binom{4}{K} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

$$\sum_{K=0}^{4} \binom{4}{K} = C_{4,0} + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} \sum_{K=0}^{4} \binom{4}{\mathrm{K}} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

$$\sum_{K=0}^{K_n} \binom{K_n}{\mathrm{K}} = \sum_{K=0}^{4} \binom{4}{\mathrm{K}} = L_2 = 16$$

$$L_n = \sum_{p=0}^{x} \binom{\boldsymbol{x}}{\mathbf{p}} = 2^x = y, \{x, y, n\} \in N, x = K_n = n'$$

$$L_n = \sum_{p=0}^{K_n} \binom{\boldsymbol{K_n}}{\mathbf{p}} = 2^{n'} = 2^{K_n} = 2^{2^n}, \{n\} \in N$$

Fica, portanto, demonstrada a sagacidade de Wittgenstein em reduzir a aritmética à lógica com o fito de calcular o número combinatório de possibilidades de verdade, bem como o número de proposições moleculares a partir do número de possibilidades de verdade, desenvolvendo assim o cálculo proposicional através de uma ferramenta antiga na matemática que é o recurso à recursividade. Tratou-se de uma análise técnica (lógico-matemática) da matéria, uma vez que o propósito do presente artigo não é o de apresentar uma investigação das mais variadas questões filosóficas que se apresentam no *Tractatus* de Wittgenstein, que ficará para uma outra oportunidade. Espera-se que o que foi acima trabalhado sirva ao entendimento daquilo que parece trivial, mas que, sem um conhecimento de matemática, jamais seria possível de ser construído, a saber, o *cálculo proposicional clássico*.

## Considerações Finais

É muito difícil entender a obra de um autor, desconsiderando o contexto histórico em que ele está inserido. No caso de Wittgenstein, não se pode perder que, antes de ir para a filosofia, ele era um engenheiro mecânico, versado em física e matemática e muitos dos seus conhecimentos nessa área refletem em sua obra de 1922, o *Tractatus Logico-Philosophicus* – fato negligenciado por muitos dos seus intérpretes.

Ante a grande lacuna deixada pelos intérpretes do *Tractatus* de Wittgenstein no que diz respeito a demonstrar os fundamentos do cálculo proposicional da obra a partir dos fundamentos da matemática, o que se quis aqui foi demonstrar que o método de tabelas de verdade é parte de um procedimento comum no cálculo que tem como base as operações recursivas no âmbito da matemática. A proposta foi demonstrar que as operações de verdade têm um caráter recursivo devido à possibilidade de aplicação reiterada da função de verdade, tal como acontece no caso do conjunto dos números naturais, no cálculo do fatorial, nos procedimentos da análise combinatória, bem como no cálculo de probabilidade. A aplicação das equações de somatório empregadas nos aforismos 4.27 e 4.42 do *Tractatus* são as evidências de que precisamos para elucidar a questão dos fundamentos do cálculo proposicional tractariano a partir dos recursos da aritimética.

## Referências bibliográficas

BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N. G. *Enciclopédia de termos lógico-filosóficos*. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

COPI, Irving M. *Introduction to Logic.* New York: Macmillan Publishing Company, 1953.

LANDIM FILHO, Raul F. *Sentido e Verdade no Tractatus de L. Wittgenstein*. Trabalho apresentado no Encontro de Filosofia das Ciências, 1, nov. Campinas, 1979. 10 p. (datil.).

MORTARI, Cezar A. *Introdução à Lógica.* São Paulo: Editora Unesp, 2001.

PILCH, Martin. The Structure of Wittgenstein's Logical Space. *Wittgenstein-Studien*, v. 8, n. 1, p. 15-60. ISSN (Online): 1868-7458, ISSN (Print): 1868-7431, 2017.

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. *Introdução à análise combinatória.* 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

ISSN 2175-1811

SIMÕES, E.; CORRÊA, V. M.; SANTOS, W. R. "Sobre a importância e abrangência da análise das proposições condicionais na história da lógica". *Investigação Filosófica*, v. 11, n. 3, p. 95-114, 2020.

WRIGHT, G. H. von (org.). *Letters to Russell, Keynes and Moore.* Trad. ingl. B. F. McGuinness. Oxford: Blackwell, 1974.

WITTGENSTEIN, L. Notas sobre lógica. *In*: *Cadernos*: 1914-1916. Trad. João Tiago Proença. Lisboa: Edições 70, 1998.

_____. *Tractatus Logico-Philosophicus.* 3. ed. Trad. apresentação e estudo introdutório Luiz Henrique Lopes dos Santos. [Introdução Bertrand Russell]. São Paulo: EDUSP, 2001.