

Comparação entre Elipses de Erros absolutas e relativas com Mudanças na Posição do *Datum*

Prof. Rômulo Parma Gonçalves
Prof. Antônio Simões Silva
Leonardo Campos de Assis
Giuliano Sant'Anna Marotta
Rafael José de Oliveira Andrade

UFV - Depto. de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Eng^a Civil
– Informações Espaciais -
36570-000 Viçosa MG
goncalvesrp@ufv.br / romuloparma@yahoo.com.br

Resumo: Utilizou-se o modelo paramétrico do método dos mínimos quadrados para ajustar observações de campo e conhecer os elementos das elipses de erros. Essas são importantes formas de se representar graficamente a precisão posicional através da região de confiança. Investigou-se neste trabalho, o comportamento das elipses de erros absolutas e relativas e suas dependências em relação à posição do *datum*. Foram obtidos resultados que permitiram concluir que as elipses de erros absolutas sofrem grandes variações dependendo da posição do *datum*. O mesmo não pode ser afirmado em relação às elipses relativas, porém observou-se pequena variação em seus elementos.

Palavras chaves: Ajustamento de Observações; Elipses de Erros; Posição do *Datum*

Abstract: It was used the parametric model from the least squares method to adjust field observations and to compute error ellipses elements. These ones are important ways to graphical representation of the positional precision through the reliability region. This work was searched the conduct of the absolute and relative error ellipses and them dependence of *datum* position. The results obtained conclude that the absolute error ellipses present great variation depending on the *datum* positioning. The same conclusion can not be affirmed to relative ellipses, but was observed small variations in its elements.

Keywords: Observations Adjustment; Error Ellipses; *Datum* Positioning

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho mostra a variação da elipse de erro absoluta em relação à distância das estações ao ponto *datum*. Com essa variação verifica-se a dependência entre essas elipses e o *datum*, permitindo afirmar se ela *datum-dependent*. É verificada também a situação das elipses de erros relativas, que se mostram diferentes das elipses absolutas por não dependerem do *datum* e, portanto, são ditas *datum-independent*. É mostrada ao longo do trabalho a formulação para obtenção dessas elipses.

Estas elipses podem ser consideradas como a representação gráfica das precisões das coordenadas das estações. Para sua obtenção usa-se a matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados.

Para efeito de comparação fez-se com que a estação fixa (*datum*) estivesse em pontos diferentes ao longo do estudo, variando do vértice 1 (um) ao vértice 5 (cinco). Durante esta variação, foram mantidas as mesmas observações com as mesmas variâncias.

2 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo, usar o modelo paramétrico para ajustar as observações topográficas, calcular os elementos das elipses de erros absolutas e relativas e comparar seu comportamento, alterando a posição do *datum* para verificar se há ou não, a dependência posicional para o caso das elipses relativas.

3 METODOLOGIA

Os dados referentes às observações de campo são apresentados nas Tabelas 1 e 2, uma para apresentar observações angulares e outra para apresentar as observações de distância, respectivamente.

Tabela 1 Dados angulares de campo.

	Em	De	Para	Âng. horário	D.P.(")
α_1	1	5	2	81°52'10,2"	2,5
α_2	2	1	3	90°00'47,5"	2,3
α_3	3	2	4	206°33'20,4"	3,0
α_4	4	3	5	45°00'09,0"	2,4
α_5	5	4	1	116°33'50,9"	4,0

Tabela 2 Dados de distância de campo.

	De	Para	Dist. Horiz. (m)	D.P. (mm)
d_{12}	1	2	1118,043	4,2
d_{23}	2	3	1118,037	3,2
d_{34}	3	4	1000,010	5,2
d_{45}	4	5	1414,214	4,1
d_{51}	5	1	1581,143	4,2
d_{13}	1	3	1581,151	5,5

A partir dos parâmetros aproximados (Equação 1) elaborou-se um croqui da poligonal em estudo, apresentado na ilustração da . Os dados empregados na determinação da posição do *datum*, *a priori*, são $Azimute_{1,2} = 153^\circ 26' 54,2'' \pm 4,0''$; $N_1 = 10.000,000 \pm 0,005 m$; $E_1 = 3.350,000 \pm 0,005 m$.

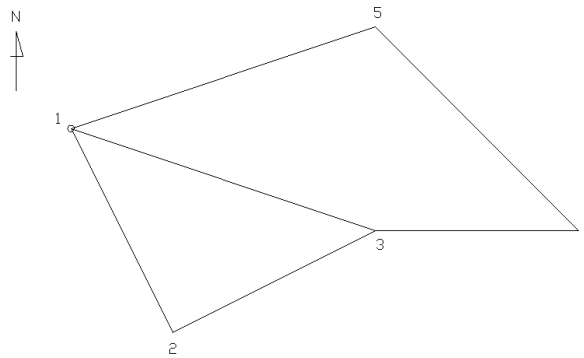


Figura 1 Croqui da poligonal

$$X_0 = \begin{bmatrix} N1 \\ E1 \\ N2 \\ E2 \\ N3 \\ E3 \\ N4 \\ E4 \\ N5 \\ E5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000,000 \\ 3350,000 \\ 8999,875 \\ 3849,769 \\ 9499,411 \\ 4850,004 \\ 9499,110 \\ 5850,014 \\ 10499,455 \\ 4850,359 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Os valores aproximados dos parâmetros (X_0) e o croqui da poligonal foram obtidos de forma analítica. O cálculo dos elementos das elipses de erro absolutas foi desenvolvido através da determinação do valor angular de θ_1 e θ_2 e linear dos semi-eixos σ_n , σ_e , onde o ângulo θ é o azimute dos semi-eixos das elipses de erros. As equações para tal determinação são mostradas em 2 e 3.

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\sigma_{NE}}{\sigma_N^2 - \sigma_E^2}\right) \quad (2)$$

$$\theta_2 = \theta_1 \pm 90^\circ \quad (3)$$

Os valores dos elementos lineares determinaram o comprimento dos semi-eixos das elipses absolutas representados graficamente pela ilustração da , e calculado pelas Equações 4 e 5.

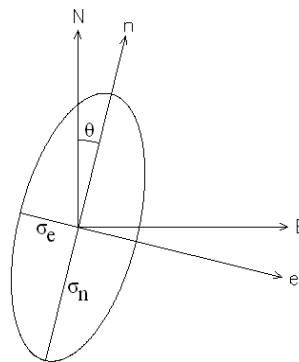


Figura 2 Esquema da Elipse de Erros e seus elementos

$$\sigma_n^2 = \text{sen}^2\theta \cdot \sigma_E^2 + \text{cos}^2\theta \cdot \sigma_N^2 + 2 \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \sigma_{NE} \quad (4)$$

$$\sigma_e^2 = \text{cos}^2\theta \cdot \sigma_E^2 + \text{sen}^2\theta \cdot \sigma_N^2 - 2 \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \sigma_{NE} \quad (5)$$

Para a obtenção dos elementos das elipses de erro relativas, procedeu-se com o cálculo das variâncias e covariâncias (σ_N^2 , σ_E^2 e σ_{NE}) conforme equações 6, 7 e 8, respectivamente. Esses mesmos elementos encontram-se ilustrados na Figura 3.

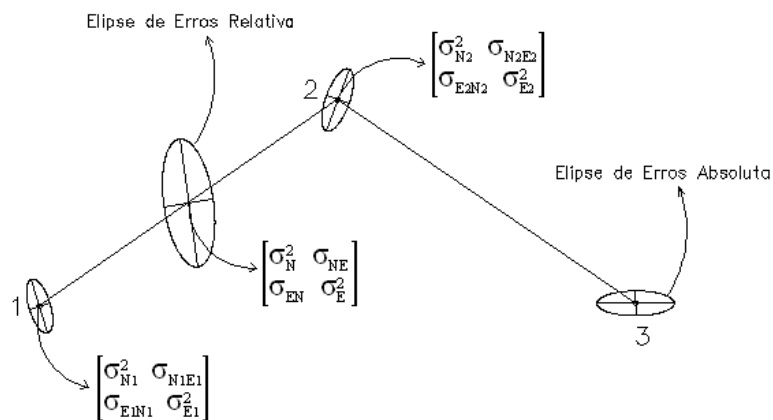


Figura 3 Esquema de elipses e matrizes variância-covariância

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 - 2\sigma_{N_1 N_2} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_N^2 & \sigma_{NE} \\ \sigma_{NE} & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_E^2 = \sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 - 2\sigma_{E_1 E_2} \quad (7)$$

$$\sigma_{NE} = \sigma_{N_1 E_1} - \sigma_{N_1 E_2} - \sigma_{N_2 E_1} + \sigma_{N_2 E_2} \quad (8)$$

Tanto para os cálculos dos valores angulares θ_1 e θ_2 quanto para o cálculo dos valores dos semi-eixos das elipses relativas, foram utilizadas as mesmas equações empregadas para realizar os cálculos desses mesmos elementos das elipses absolutas. Logo, para a determinação dos valores angulares θ_1 e θ_2 usaram-se as equações (2 e 3) e para o cálculo dos semi-eixos usaram-se as equações (4 e 5). Entretanto, para estas últimas, utilizaram-se no lugar da matriz Cx , os valores das matrizes variâncias e covariâncias dos alinhamentos, esquematizado pela Figura 3.

Em seguida, calcularam-se novamente as elipses de erros relativas, porém com uma mudança na posição do *datum*. Como critério para escolha da nova posição do *datum*, foi determinado o vértice da poligonal situado a uma menor distância do centróide da área.

As coordenadas do centróide (E_c e N_c) foram obtidas calculando-se a média aritmética simples dos parâmetros ajustados de cada vértice da poligonal, conforme ilustram as equações 9 e 10, cujos valores obtidos foram 4.550,0292 para *Este* e 9.699,5702 para *Norte*, respectivamente, onde E_c e N_c apresentam os valores das coordenadas *Este* e *Norte* do ponto (centróide) estimado, n refere-se ao número total de vértices que compõem a poligonal e i refere-se ao i -ésimo valor do parâmetro *Este* e *Norte* de cada vértice.

O vértice mais próximo, determinado para ser o novo *datum* foi o vértice 3. Fixado com o mesmo valor dos parâmetros ajustados (Xa) e a mesma precisão do vértice 1, *a priori*, tem seus valores apresentados na . Seu azimute pôde ser obtido através da equação 11.

$$E_c = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{n} \quad (9)$$

$$N_c = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} \quad (10)$$

Tabela 1 Parâmetros do novo *datum*.

Vértice	N (m)	d.p. (mm)	E (m)	d.p. (mm)
3	9499,571	0,005	4849,913	0,005

$$Az_{3-4} = \arctg \frac{(E_4 - E_3)}{(N_4 - N_3)} \pm DP'' = 90^\circ 01' 02,1'' \pm 4,0'' \quad (11)$$

Procedeu-se com a alteração da posição do *datum* para posterior cálculo dos elementos das novas elipses relativas até que todos os vértices da poligonal tivessem sido fixados como *data*, permitindo-se assim ampliar o critério de comparação entre as elipses. Os valores das novas posições dos *data* podem ser observados na tabela 4 e seus respectivos azimutes estão apresentados nas Equações 12, 13 e 14.

Tabela 4 Parâmetros dos novos data.

Vértice	N (m)	d.p. (mm)	E (m)	d.p. (mm)
2	8999,892	0,005	3849,761	0,005
4	9499,415	0,005	5849,919	0,005
5	10499,630	0,005	4850,130	0,005

$$Az_{2-3} = 63^{\circ}27'11,2'' \pm 4,0'' \quad (12)$$

$$Az_{4-5} = 315^{\circ}00'43,8'' \pm 4,0'' \quad (13)$$

$$Az_{5-1} = 251^{\circ}34'45,4'' \pm 4,0'' \quad (14)$$

4 RESULTADOS

Após 1 (uma) iteração obtiveram-se os parâmetros ajustados e seus desvios-padrões. Os desvios foram calculados através dos elementos da matriz de variância-covariância (tabela 6) dos parâmetros ajustados (Cx). Os parâmetros ajustados e seus respectivos desvios padrões são apresentados na tabela 5.

Tabela 5 Parâmetros ajustados e seus desvios padrões.

Parâmetros (m)		d.p. (mm)
N1	10000,000	41,2
E1	3350,000	41,2
N2	8999,892	94,6
E2	3849,761	165,6
N3	9499,571	248,4
E3	4849,913	93,7
N4	9499,415	415,8
E4	5849,919	100,9
N5	10499,630	256,4
E5	4850,130	99,5

Tabela 6 Matriz de variância-covariância dos parâmetros ajustados.

	N1	E1	N2	E2	N3	E3	N4	E4	N5	E5	
Cx =	1,7E-03	3,9E-20	1,7E-03	6,6E-13	1,7E-03	-2,4E-12	1,7E-03	-5,9E-12	1,7E-03	1,6E-12	N1
	3,9E-20	1,7E-03	1,6E-12	1,7E-03	-5,0E-12	1,7E-03	-2,6E-11	1,7E-03	-1,9E-11	1,7E-03	E1
	1,7E-03	1,6E-12	8,9E-03	1,2E-02	2,1E-02	6,3E-03	3,4E-02	6,3E-03	2,1E-02	-6,4E-03	N2
	6,6E-13	1,7E-03	1,2E-02	2,7E-02	3,8E-02	1,5E-02	6,4E-02	1,5E-02	3,8E-02	-1,1E-02	E2
	1,7E-03	-5,0E-12	2,1E-02	3,8E-02	6,2E-02	1,9E-02	1,0E-01	1,9E-02	6,2E-02	-2,0E-02	N3
	-2,4E-12	1,7E-03	6,3E-03	1,5E-02	1,9E-02	8,8E-03	3,1E-02	8,7E-03	1,8E-02	-4,4E-03	E3
	1,7E-03	-2,6E-11	3,4E-02	6,4E-02	1,0E-01	3,1E-02	1,7E-01	3,3E-02	1,0E-01	-3,5E-02	N4
	-5,9E-12	1,7E-03	6,3E-03	1,5E-02	1,9E-02	8,7E-03	3,3E-02	1,0E-02	1,8E-02	-4,2E-03	E4
	1,7E-03	-1,9E-11	2,1E-02	3,8E-02	6,2E-02	1,8E-02	1,0E-01	1,8E-02	6,6E-02	-2,1E-02	N5
	1,6E-12	1,7E-03	-6,4E-03	-1,1E-02	-2,0E-02	-4,4E-03	-3,5E-02	-4,2E-03	-2,1E-02	9,9E-03	E5

Os valores dos azimutes e dos semi-eixos das elipses de erros absolutas são apresentados na tabela 7 e na tabela 8, respectivamente.

Tabela 7 Azimutes dos semi-eixos das elipses absolutas.

Vértice	Azimutes	
1	θ_1	358°
	θ_2	88°
2	θ_1	333°
	θ_2	63°
3	θ_1	18°
	θ_2	108°
4	θ_1	11°
	θ_2	101°
5	θ_1	341°
	θ_2	71°

Tabela 8 Semi-eixos das elipses absolutas.

Vértice	Para θ_1		Para θ_2	
1	σ_n	41.2 mm	σ_n	41.2 mm
	σ_e	41.2 mm	σ_e	41.2 mm
2	σ_n	52.8 mm	σ_n	183.2 mm
	σ_e	183.2 mm	σ_e	52.8 mm
3	σ_n	259.9 mm	σ_n	53.8 mm
	σ_e	53.8 mm	σ_e	259.9 mm
4	σ_n	423.3 mm	σ_n	62.4 mm
	σ_e	62.4 mm	σ_e	423.3 mm
5	σ_n	269.9 mm	σ_n	53.1 mm
	σ_e	53.1 mm	σ_e	269.9 mm

De posse dos valores acima apresentados, então os elementos das elipses de erros absolutas são identificados na tabela 9.

Tabela 9 Elementos das elipses de erros absolutas.

Vértice	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1	41,2 mm	41,2 mm	Círculo
2	183,2 mm	52,8 mm	63°
3	259,9 mm	53,8 mm	18°
4	423,3 mm	62,4 mm	11°
5	269,9 mm	53,1 mm	341°

Os valores das matrizes de variâncias e covariâncias dos alinhamentos da poligonal utilizados para a determinação das elipses de erro relativas são apresentados na tabela 10.

Tabela 10 Matriz de variância-covariância dos alinhamentos.

Alinhamento 1-2		Alinhamento 3-4		Alinhamento 5-1	
0,00725	0,01231	0,03332	0,00094	0,06406	-0,02112
0,01231	0,02573	0,00094	0,00165	-0,02112	0,00821
Alinhamento 2-3		Alinhamento 4-5		Alinhamento 3-1	
0,02837	-0,01346	0,02961	0,02800	0,05999	0,01860
-0,01346	0,00718	0,02800	0,02856	0,01860	0,00709

Os valores dos azimutes e dos semi-eixos das elipses de erros relativas são apresentados na tabela 11 e na tabela 12, respectivamente.

Tabela 11 Azimutes dos semi-eixos das elipses relativas

Alinhamento	Azimute	
1-2	θ_1	333°
	θ_2	63°
2-3	θ_1	334°
	θ_2	64°
3-4	θ_1	2°
	θ_2	92°
4-5	θ_1	44°
	θ_2	134°
5-1	θ_1	341°
	θ_2	71°
1-3	θ_1	18°
	θ_2	108°

Tabela 12 Semi-eixos das elipses relativas

Alinhamento	Para θ_1		Para θ_2	
	σ_n	mm	σ_n	mm
1-2	σ_n	33.1	σ_n	178.5
	σ_e	178.5	σ_e	33.1
2-3	σ_n	186.8	σ_n	25.4
	σ_e	25.4	σ_e	186.8
3-4	σ_n	182.6	σ_n	40.2
	σ_e	40.2	σ_e	182.6
4-5	σ_n	238.9	σ_n	32.8
	σ_e	32.8	σ_e	238.9
5-1	σ_n	266.7	σ_n	33.5
	σ_e	33.5	σ_e	266.7
1-3	σ_n	256.6	σ_n	34.7
	σ_e	34.7	σ_e	256.6

De posse dos valores apresentados acima, os elementos das elipses de erros relativos podem ser calculados e identificados na tabela 13, permitindo-se assim sua representação gráfica apresentada através da figura 4.

Tabela 13 Elementos das elipses de erros relativos com vértice 1 fixo

Alinhamento	Semi-Eixo		Az S.E. Maior
o	Maior	Menor	
1-2	178,5 mm	33,1 mm	63°
2-3	186,8 mm	25,4 mm	334°
3-4	182,6 mm	40,2 mm	2°
4-5	238,9 mm	32,8 mm	44°
5-1	266,7 mm	33,5 mm	341°
1-3	256,6 mm	34,7 mm	18°

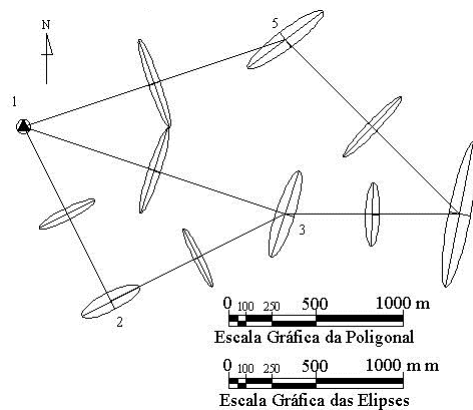


Figura 4 Polígono e elipses de erro absolutas e relativas com vértice 1 fixo.

O vértice fixado em seqüência foi aquele cujas coordenadas apresentavam menor distância em relação ao centróide da poligonal, ou seja, o vértice 3. Seus elementos das elipses de erros absolutas podem ser observados na tabela 14.

Tabela 14 Elementos das elipses de erros absolutas com vértice 3 fixo

Vértice	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1	291,4 mm	53,9 mm	18°
2	210,0 mm	48,4 mm	53°
3	41,2 mm	41,2 mm	Círculo
4	164,9 mm	57,8 mm	0°
5	181,4 mm	75,6 mm	83°

Como os procedimentos para se calcular os elementos das novas elipses de erros relativas são os mesmos, prosseguiu-se então apenas com os resultados desses novos elementos (tabela 15 e figura 5).

Tabela 15 Elementos das elipses de erros relativas com vértice 3 fixo.

Alinhamento	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1-2	204,1 mm	33,0 mm	63°
2-3	205,9 mm	25,5 mm	153°
3-4	159,7 mm	40,6 mm	0°
4-5	242,6 mm	32,9 mm	45°
5-1	272,6 mm	33,4 mm	342°
1-3	288,5 mm	34,8 mm	18°

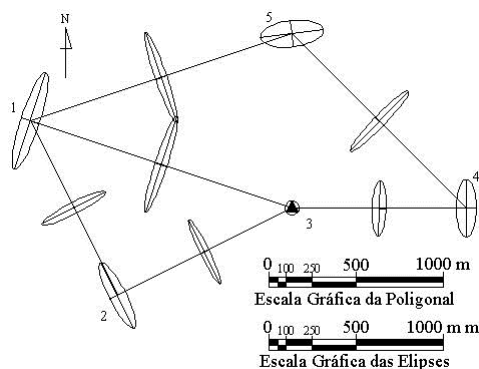


Figura 5 Poligonal, Elipses de Erro Absolutas e Relativas com vértice 3 fixo.

Com o intuito de verificar o comportamento das elipses de erro (absolutas e relativas) em relação à posição do *datum*, procedeu-se com a fixação alternada do mesmo para as demais posições dos vértices, 2, 4 e 5, respectivamente.

Ao se fixar o vértice 2, identificou-se na tabela 17, os elementos das elipses de erro absolutas e na tabela 16 os elementos das elipses de erro relativas. Na ilustração da figura 6 pode-se observar a configuração obtida.

Tabela 16 Elementos das elipses de erros absolutas com vértice 2 fixo

Vértice	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1	191,3 mm	52,7 mm	62°
2	41,2 mm	41,2 mm	Círculo
3	183,2 mm	48,4 mm	153°
4	343,3 mm	67,9 mm	167°
5	299,1 mm	72,3 mm	124°

Tabela 17 Elementos das elipses de erros relativos com vértice 2 fixo.

Alinhamento	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1-2	186,9 mm	32,9 mm	62°
2-3	178,5 mm	25,5 mm	153°
3-4	184,2 mm	40,4 mm	1°
4-5	243,8 mm	32,8 mm	45°
5-1	264,3 mm	33,5 mm	162°
1-3	257,9 mm	34,7 mm	19°

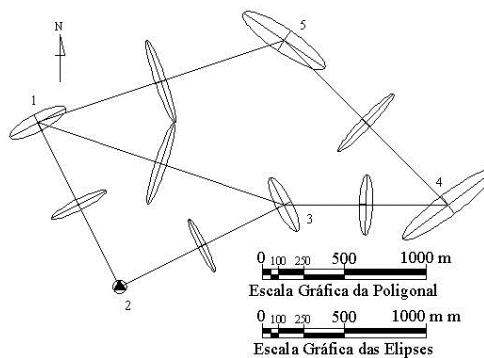


Figura 6 Poligonal e Elipses de Erro Relativas com vértice 2 fixo.

Fixando-se o vértice 4, foi possível verificar o comportamento das elipses de erro absolutas e relativas através de seus elementos calculados e apresentados na tabela 18 (elipses absolutas) e tabela 19 (elipses relativas), bem como pela ilustração da figura 7.

Tabela 18 Elementos das elipses de erros absolutas com vértice 4 fixo

Vértice	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1	420,1 mm	62,1 mm	10°
2	345,3 mm	67,9 mm	165°
3	176,4 mm	57,8 mm	179°
4	41,2 mm	41,2 mm	Círculo
5	229,6 mm	52,7 mm	45°

Tabela 19 Elementos das elipses de erros relativos com vértice 4 fixo.

Alinhamento	Semi-Eixo Maior	Semi-Eixo Menor	Az S.E. Maior
1-2	188,9 mm	33,1 mm	63°
2-3	192,7 mm	25,4 mm	153°
3-4	171,6 mm	40,5 mm	179°
4-5	225,8 mm	32,9 mm	45°
5-1	273,6 mm	33,2 mm	163°
1-3	266,5 mm	34,7 mm	18°

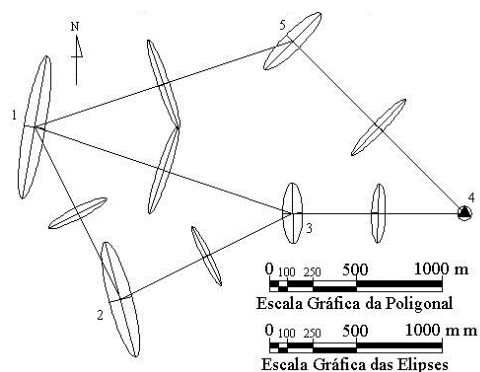


Figura 7 Poligonal e Elipses de Erro Relativas com vértice 4 fixo.

Podem-se observar na tabela 20 e tabela 21, os elementos das elipses de erro absolutas e relativas, respectivamente. Estes elementos foram calculados considerando-se o vértice 5 como fixo e aliados à ilustração apresentada na figura 8, permitem verificar o comportamento das elipses para mais esta configuração.

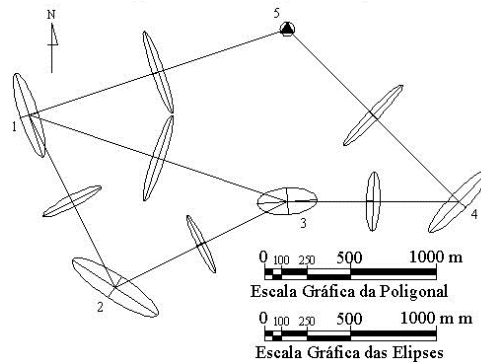


Figura 8 Poligonal e Elipses de Erro Relativas com vértice 5 fixo

5 CONCLUSÃO

A região de confiança das elipses de erros absolutas tendeu a uma grande variação à medida que se afastaram do *datum*, o mesmo não pôde ser constatado para o caso das elipses de erro relativas, embora as mesmas apresentassem uma pequena variação.

Para o caso estudado, as elipses de erros relativos apresentaram pequenas variações quando comparadas àquelas com novas posições do *datum*. Assumindo tais variações insignificantes para fins práticos de engenharia, podendo-se concluir que as elipses relativas independem da posição do *datum*, corroborando a literatura a respeito.

6 REFERÊNCIAS

COOPER, M. A. R. *Control Surveys in Civil Engineering*. Collins. London, 1987.

CROSS, P., Working Paper No. 6. *Advanced Least Squares Applied to Position-Fixing*. Series Editor: A S Walker, North East London Polytechnic, Department of Land Surveying, 1983.

GEMAEL, C. *Introdução ao Ajustamento de Observações, Aplicações Geodésicas*. Curitiba, Editora UFPR, 1994.