

Classificação Angular de Teodolitos e Estações Totais

Alex Soria Medina ¹
 Silvío Jacks dos Anjos Garnés ²

¹ Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas – UFPR
 ✉ asmedina@geoc.ufpr.br

² Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal
 ✉ sjgarnes@geoc.ufpr.br

Conteúdo	
	1 Introdução
	2 Determinação do Desvio-Padrão da Classificação
	2.1 Metodologia - NBR 13133/94
	2.2 Classificação por Ajustamento Angular de Redes
	3 Resultados Práticos e Validação Estatística
	3.1 Resultados Práticos
	3.2 Validação Estatística
	4 Conclusão
	5 Referências Bibliográficas

Resumo: A metodologia para classificação de teodolitos e estações totais foi normalizada no país através da NBR 13133/94. Consiste na utilização de uma base materializada por cinco pilares, sendo um deles central e outros quatro afastados aproximadamente cento e oitenta e cinco metros do central e em um mesmo plano horizontal. No Brasil existem duas bases materializadas para a realização deste tipo de classificação, uma localizada no Campus da Universidade de São Paulo – USP/SP e outra no Centro Politécnico da Universidade Federal do Paraná – UFPR/PR. Apesar de efetiva a metodologia normalizada, é possível obter resultados equivalentes de classificação por meio do ajustamento angular de direções observadas de uma rede. Nesse trabalho faz-se uma análise comparativa de ambas as metodologias.

Palavras chave: Classificação angular, Ajustamento angular de redes

Abstract: The methodology for theodolites and total stations classification was normalized in Brazil through NBR 13133/94. It consists of the use of a base materialized by five pillars, one of them central and other four moved away approximately hundred, all eighty five meters of the central and in a same horizontal plan. In Brazil two bases materialized for the accomplishment of that classification type exist, one is located in the Campus of the University of São Paulo–USP/SP and another one in the Polytechnic Center of the Federal University of Paraná–UFPR/PR. In spite of effective the normalized methodology, it is possible to obtain equivalent results of classification through of the angular adjustment of a net of observed directions. In this work we make a comparative analysis of both methodologies.

Keywords: Angular Classification, Angular networks adjustment

1 Introdução

A partir da implantação em maio de 1994 da norma brasileira denominada NBR 13133 – Execução de levantamento topográfico, empresas e também órgãos públicos têm solicitado trabalhos topográficos com metodologias e precisões prescritas nesta norma. Uma das exigências em levantamentos planimétricos é que o teodolito ou estação total a ser empregado deva se enquadrar em relação à precisão angular, a alguma das seguintes classes:

Classe 1 – precisão baixa:	desvio-padrão $\leq 30''$
Classe 2 – precisão média:	desvio-padrão $\leq 7''$
Classe 3 – precisão alta:	desvio-padrão $\leq 2''$

A classificação acima é realizada com base no desvio-padrão da média de uma direção observada nas posições direta (PD) e inversa (PI) do instrumento. Geralmente na aquisição dos equipamentos de medida angular, o fabricante já fornece o desvio-padrão que o classifica. Porém, isto pode não ocorrer, mas, todavia, com o uso contínuo e o passar dos anos as peças podem sofrer desgastes e o equipamento necessitar de uma nova verificação e classificação.

A NBR 13133, item 4.1.1.1 esclarece, a classificação dos teodolitos e estações totais só terão validade quando efetuada por entidades oficiais e ou Universidades em bases apropriadas.

A proposta aqui apresentada é no sentido de ampliar as técnicas de classificação angular e conseqüentemente aumentar a confiabilidade dos resultados, isto porque, a classificação conforme a norma só envolve a geometria dos pontos distribuídos em torno do pilar central, ao passo que usando o ajustamento angular (na verdade direções) de observações da rede, são envolvidas configurações geométricas diversas.

2 Determinação do Desvio-Padrão da Classificação

2.1 Metodologia - NBR 13133/94

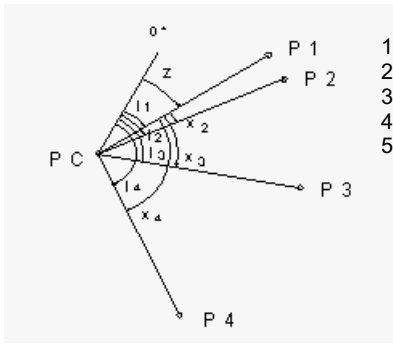


Fig. 1: Configuração da Base e Elementos do Ajustamento

As exigências para a classificação prevista na norma são:

1. quatro alvos distribuídos num arco maior que 90°;
2. distâncias iguais do centro do teodolito aos alvos;
3. alvos posicionados num mesmo plano horizontal;
4. observações em quatro séries completas em duas posições da luneta;
5. a distância mínima entre o teodolito e os alvos deve ser de 185 m.

O desvio-padrão da classificação é na verdade o desvio-padrão da unidade de peso estimado após o ajustamento por mínimos quadrados das direções observadas (direções médias das leituras em PD e PI do instrumento). A forma do ajustamento, assim como a notação empregada pela norma é bastante clássica na literatura e segundo HARVEG e RÜEGGER (1992) um dos primeiros a publicar a metodologia foi W. Jordan em 1893. Neste trabalho, no entanto, será apresentada uma forma alternativa e equivalente àquela da norma onde é usado o método paramétrico de ajustamento e notação matricial (ver GEMAEL, 1994). A equivalência dos resultados foi demonstrada algebricamente em SORIA MEDINA (1998).

A fig. 1 ilustra os elementos envolvidos para a formação do modelo, os l_i 's, $i = 1,2,3,4$ são as direções observadas, z é uma incógnita de orientação, x_2 , x_3 e x_4 são as direções incógnitas a ajustar (parâmetros). Para uma série medida, as equações de observação podem ser representadas matricialmente por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{4 \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{4 \times 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{4 \times 1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{4 \times 1}} \quad (2.1)$$

onde v_i corresponde ao i -ésimo resíduo.

Se s representar o número de alvos visados e n o número de séries realizadas, então, para cada série de observação um novo parâmetro de orientação z deve ser acrescentado e o sistema de equações ficará com $v = ns - [(s-1) + n]$ graus de liberdade. As equações (2.2) à (2.5) ilustram o ajustamento.

Sistema de equações de observação:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{L} \quad (2.2)$$

$\begin{matrix} ns \times 1 & ns \times (s-1) + n & (s-1) + n \times 1 & ns \times 1 \end{matrix}$

sistema de equações normais:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (2.3)$$

vetor dos parâmetros ajustados:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}, \quad (2.4)$$

vetor dos resíduos estimados:

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}. \quad (2.5)$$

A variância da unidade de peso e o desvio-padrão da unidade de peso são estimados respectivamente por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}}}{v}, \quad (2.6)$$

$$\hat{\sigma}_0 = + \sqrt{\hat{\sigma}_0^2}. \quad (2.7)$$

O desvio-padrão da unidade de peso (2.7) é aquele usado na classificação dos teodolitos e estações totais comentado na parte introdutória desse trabalho.

2.2 Classificação por Ajustamento Angular de Redes

Na metodologia apresentada na seção 2.1 apenas observações de direções a partir do pilar central são realizadas. No entanto, se houver intervisibilidade entre os demais

pilares (alvos), então observações de direções a partir deles para os demais poderão ser efetuadas, formando uma rede conforme mostra a fig. 2 .

A fig. 2 ilustra as possibilidades das direções a serem observadas na base de classificação da UFPR. Note que não existe intervisibilidade do pilar P₃ aos pilares P₁ e P₂. Esta deficiência de visibilidade não traz maiores conseqüências a metodologia proposta, mas seria interessante formar uma base de maneira que todos os pilares fossem intervisíveis.

O método de ajustamento a ser empregado é o das equações de condição, cujo modelo matemático pode ser representado por (GEMAEL, 1994):

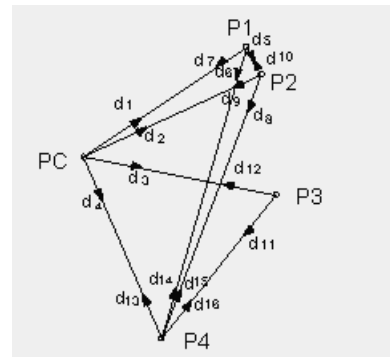


Fig. 2: Direções Observadas na Rede

$$F(La) = 0, \quad (2.8)$$

onde: $La = Lb + V$, sendo La o vetor das observações ajustadas; Lb o vetor das observações; e V o vetor dos resíduos. A linearização da equação (2.8) leva a:

$$F(Lb+V) = F(Lb) + \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{L_b} (La - Lb) = W + B V = 0, \quad (2.9)$$

onde: W corresponde ao erro de fechamento; e B a matriz de coeficientes dos resíduos.

Sendo r o número de equações de condição e n o número de direções observadas, o sistema (2.9) terá as seguintes dimensões:

$$\begin{matrix} \mathbf{B} & \mathbf{V} & + & \mathbf{W} & = & \mathbf{0} \\ r \times n & n \times 1 & & r \times 1 & & r \times 1 \end{matrix} \quad (2.10)$$

A aplicação do critério de mínimos quadrados, com P a matriz dos pesos (nessa metodologia $P=I$ porque direções não são correlacionadas e o equipamento utilizado é um só),

$$V^T P V \rightarrow \text{mínimo} \quad (2.11)$$

conduz a uma solução única para (2.10), isto é, supondo as r equações linearmente independentes, a solução é dada pela expressão (GEMAEL, 1994, p. 140):

$$\hat{V} = - B^T (B B^T)^{-1} W. \quad (2.12)$$

A variância da unidade de peso estimada é então calculada por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{r}, \quad (2.13)$$

e o desvio-padrão da unidade de peso usado na classificação, compatível com aquele da equação (2.7), é

$$\hat{\sigma}_0 = + \sqrt{\hat{\sigma}_0^2}. \quad (2.14)$$

3 Resultados Práticos e Validação Estatística

3.1 Resultados Práticos

Na realização dos testes a serem apresentados nesta seção, utilizou-se para observação das direções uma estação total TC-2002 LEICA, classificada segundo a norma alemã DIN 18723 teil 3 como da classe 3 – precisão alta – acurácia angular 1". Os pilares da base de classificação da UFPR por serem constituídos de centragem forçada, permitiram a "eliminação" do erro de centragem tanto para a estação total como também para alvos Wild utilizados.

Tab.1 : Direções Observadas do Pc

Estação	Série	Alvo visado	Posição Direta	Posição Inversa
		P ₁	0°00'00.0"	180°00'05.2"

	1ª	P ₂	9°08'31.2"	189°08'33.3"
		P ₃	45°09'12.1"	225°09'16.9"
		P ₄	100°54'32.4"	280°54'34.1"
		P ₁	45°00'00.0"	225°00'02.8"
	2ª	P ₂	54°08'30.8"	234°08'33.4"
		P ₃	90°09'13.2"	270°09'16.8"
	Pc	P ₄	145°54'33.5"	325°54'34.2"
		P ₁	90°00'00.0"	270°00'01.3"
	3ª	P ₂	99°08'29.0"	279°08'33.2"
		P ₃	135°09'09.4"	315°09'14.1"
		P ₄	190°54'31.2"	10°54'35.5"
		P ₁	0°00'00.0"	179°59'59.9"
	4ª	P ₂	9°08'28.9"	189°08'33.3"
		P ₃	45°09'11.9"	225°09'12.6"
		P ₄	100°54'30.2"	280°54'32.6"

A tab. 1 contém as quatro séries de observações realizadas a partir do pilar central. As direções ajustadas (fig. 1), a variância, o desvio padrão e a forma quadrática dos resíduos foram:

$$x_2 = 9^\circ 08' 30.49''$$

$$x_3 = 45^\circ 09' 12.23''$$

$$x_4 = 100^\circ 54' 31.81''$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{v} = \frac{4.488}{9} = 0.499^{(2)}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.706''$$

$$\hat{V}^T \hat{V} = 4.488^{(2)}$$

Para a realização dos testes da metodologia apresentada na seção (2.2), foram efetuadas as medidas das direções (fig.2) com os mesmos equipamentos anteriormente descritos. A tab. 2 mostra as direções (médias de PD e PI) observadas por dois operadores e os resíduos estimados pela equação (2.12).

Tab. 2 : Direções Observadas e Resíduos Calculados

Direções	Operador 1		Operador 2	
	Direções	Resíduos estimados	Direções	Resíduos estimados
d ₁	0°00'01.5"	-0.241"	- 0°00'00.1"	-0.815"
d ₂	9°08'29.6"	0.246"	9°08'31.1"	-0.115"
d ₃	45°09'13.1"	0.465"	45°09'12.3"	0.660"
d ₄	100°54'33.9"	-0.470"	100°54'31.4"	0.270"
d ₅	0°00'02.0"	-0.012"	0°00'02.6"	-0.150"
d ₆	45°56'19.3"	-0.229"	45°56'22.6"	-0.665"
d ₇	85°30'53.4"	0.241"	85°30'54.6"	0.815"
d ₈	0°00'01.9"	0.234"	0°00'02.3"	-0.265"
d ₉	44°08'45.0"	-0.246"	44°08'46.3"	0.115"
d ₁₀	129°29'24.5"	0.012"	129°29'21.4"	0.150"
d ₁₁	0°00'03.1"	0.465"	0°00'02.3"	0.660"
d ₁₂	62°09'51.3"	-0.465"	62°09'50.1"	-0.660"
d ₁₃	0°00'03.0"	0.470"	0°00'02.4"	-0.270"
d ₁₄	39°30'56.5"	0.229"	39°30'55.4"	0.665"
d ₁₅	44°05'17.5"	-0.234"	44°05'16.8"	0.265"
d ₁₆	62°04'56.8"	-0.465"	62°04'57.6"	-0.660"

As outras estimativas foram:

Operador 1	Operador 2
$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{4} = 0,440''^2$	$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{4} = 1,078''^2$
$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0,663''$	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 1,038''$
$\hat{V}^T \hat{V} = 1,759''^2$	$\hat{V}^T \hat{V} = 4,313''^2$

3.2 Validação Estatística

A validação estatística dos ajustamentos realizados são feitas sob a hipótese da normalidade dos resíduos/observações e para isso a forma quadrática dos resíduos $\hat{V}^T \hat{V}$, deverá ter um valor entre dois pontos limites da distribuição de probabilidade Qui-quadrado χ^2 , com v graus de liberdade (fig. 3).

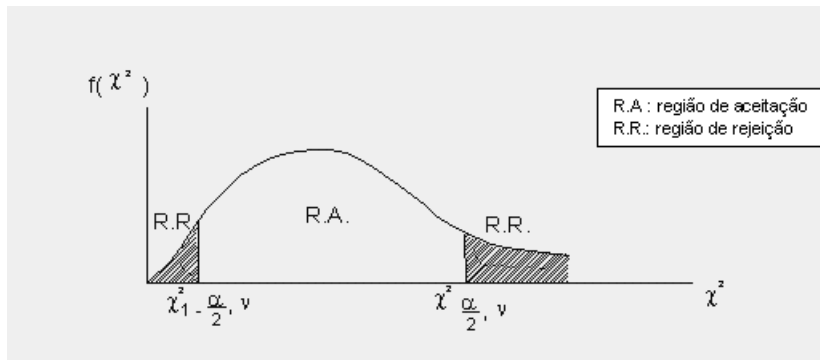


Fig. 3: Distribuição de Probabilidades Qui-quadrado

Para o ajustamento paramétrico da seção (2.1) teve-se $v = 9$ graus de liberdade e para o ajustamento das equações de condição, seção (2.2), teve-se $v = 4$ graus de liberdade. Se for utilizado um nível de significância $\alpha = 5\%$ como é comum na prática, os pontos limites, inferior e superior para o valor da forma quadrática $\hat{V}^T \hat{V}$ são:

para $v = 9$	limite inferior = $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.70$ limite superior = $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = 19.02$
para $v = 4$	limite inferior = $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0.49$ limite superior = $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = 11.14$

4 Conclusão

No primeiro ajustamento, o das direções a partir do pilar central (metodologia da norma NBR 13133/94), o valor da forma quadrática dos resíduos $\hat{V}^T \hat{V} = 4.488''^2$ está contido dentro do intervalo da região de aceitação (RA) da distribuição qui-quadrado, ao nível de significância $\alpha = 5\%$. Desta forma, o ajustamento é validado e a estação total TC-2002 LEICA recebe a classificação: classe 3 – precisão alta, pois, o desvio-padrão estimado a posteriori foi $\hat{\sigma}_0 = 0.706''$.

No segundo ajustamento, o da rede, foram introduzidas observações feitas por dois operadores para maior comprovação da metodologia. Os resultados das formas quadráticas dos resíduos de ambos os operadores estão contidos dentro do intervalo RA da distribuição qui-quadrado, ao nível de significância $\alpha = 5\%$. Assim, os ajustamentos ficam validados. Os desvios-padrão estimados $\hat{\sigma}_0 = 0.663''$ e $\hat{\sigma}_0 = 1.038''$, confirmam a classificação anterior.

A breve discussão acima, em outras palavras, mostrou a equivalência entre a duas metodologias. Contudo, algumas informações adicionais devem ser comentadas. No primeiro caso, a classificação usando só as direções a partir do PC tem como vantagem a eliminação de muitos erros sistemáticos pela própria disposição dos demais pilares em relação a ele. No segundo caso, a classificação usando a rede, alguns dos erros sistemáticos podem não ser completamente eliminados só pela técnica de leitura nas posições PD e PI (como, por exemplo, no ajuste focal do instrumento) e o método deveria detectar um aumento na forma quadrática $\hat{V}^T \hat{V}$ (podendo não estar contido no intervalo RA da distribuição qui-quadrado). Deste modo, o ajustamento da rede é mais realista na identificação das condições do instrumento e deveria também ser implementado como um critério de classificação.

5 Referências Bibliográficas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS: *Execução de levantamento topográfico, NBR 13133.* Rio de Janeiro, Maio 1994.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG: *Feldverfahren zur Genauigkeitsuntersuchung geodätischer Instrumente – Theodolite,*

DIN 18723 Teil 3, Berlin 1990

GEMAEL, C.: *Introdução ao ajustamento das observações*. Curitiba: Editora UFPR, 1994.

HARVEY, B.R.; RÜEGER, J.M.: *Theodolite observations and least squares*. The Australian Surveyor, v. 37, n.2, p. 120-128, June, 1992.

SORIA MEDINA, A.: *Classificação de teodolitos e estações totais na UFPR*. Curitiba, 1998. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Tecnologia, UFPR.

