

Análise da Deformação de Estrutura de Redes Geodésicas Horizontais

Luiz Danilo Damasceno Ferreira¹
 Sílvia Jacks dos Anjos Garnés²

¹ Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas – UFPR
 ✉ danilo@geoc.ufpr.br

² Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal
 ✉ sjgames@geoc.ufpr.br

Conteúdo	1 Introdução 2 Parâmetros de Deformação 2.1 Parâmetros Básicos de Deformação 2.2 Parâmetros de Deformação em Estruturas Geodésicas 3 Análise de Deformação de uma Rede Geodésica Local 4 Considerações Finais 5 Agradecimentos 6 Referências Bibliográficas
-----------------	--

Resumo: A estrutura de uma rede geodésica é caracterizada a partir de vértices monumentados no terreno que são conectados entre si através de observações. Supondo-se que estas observações sejam isentas de erros grosseiros e sistemáticos, o ajustamento proporciona coordenadas de cada um dos vértices. Se as coordenadas resultantes do ajustamento de duas épocas distintas são comparadas pode-se detectar possíveis deformações na estrutura da rede. Deste modo, este artigo mostra uma análise da deformação de uma estrutura geodésica local, localizada no litoral paranaense, através dos parâmetros de deformação, conceitos estes inerentes à Mecânica dos Materiais.

Palavras chave: Redes Geodésicas, Análise de Deformações

Abstract: The structure of a geodetic network is characterized by points on the terrain, which are connected by observations. By chance, if these observations don't have neither blunders errors nor systematic errors then, the adjustment provides the coordinates of each point. If the adjustment of the coordinates from two different epochs are compared one can verify possible deformations in the network. This paper shows an analysis of deformation of a local geodetic network, localized in the Paraná state coastal area, through the deformation parameters which are concerned with Mechanics of Material.

Keywords: Geodetic Networks, Deformation Analysis.

1 Introdução

Uma estrutura geodésica constitui-se de uma rede de pontos materializados no terreno, cujas posições foram obtidas por meio de observações e cálculos rigorosos.

Em algumas aplicações é importante o estabelecimento de um controle de possíveis movimentos nesta estrutura, um exemplo, são os deslocamentos das placas tectônicas. Assumindo a estrutura geodésica como um corpo, então qualquer mudança na forma, dimensão e posição trata-se de uma deformação.

Uma das formas de identificar as deformações de uma estrutura geodésica é através da aplicação dos conceitos da Mecânica dos Materiais nos deslocamentos detectados por levantamentos em épocas diferentes. O resultado desta técnica vem através de parâmetros que identificam tração e compressão (e outros) sofridos pela estrutura nos pontos analisados.

Várias são as literaturas atualmente disponíveis que indicam a viabilidade de aplicar os conceitos da Mecânica dos Materiais no estudo de deformação de estruturas geodésicas, algumas delas são por exemplo: (Thapa, 1980), (Silva, 1986), (Kuang, 1996) e (Santos, 1998).

Neste artigo, são apresentados alguns dos conceitos da Mecânica dos Materiais necessários ao estudo das deformações de estruturas geodésicas e também uma aplicação em uma Rede Geodésica Local na região litorânea do Paraná situada entre Matinhos e Pontal do Sul.

2 Parâmetros de Deformação

A determinação das deformações de um corpo (ou de uma estrutura) podem ser descritas em termos de tração, compressão e cisalhamento, isto é, medem-se as alterações sofridas pelos comprimentos de segmentos de retas e pelos ângulos entre eles (Silva, 1986).

A deformação, por tração ou compressão sob a ação de cargas multiaxiais, é definida como a razão entre a variação do seu comprimento pelo comprimento original. Deste modo, as deformações específicas ao longo de cada um de seus eixos coordenados (fig. 2.1) são:

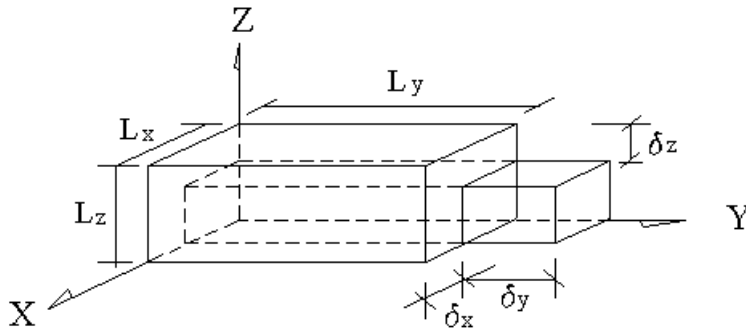


Figura 2.1 :Tração e Compressão

$$\epsilon_x = \delta_x / L_x ; \quad \epsilon_y = \delta_y / L_y ; \quad \epsilon_z = \delta_z / L_z \quad (2.1)$$

A fig. 2.2 mostra a deformação por cisalhamento e em relação ao eixo X é dado por:

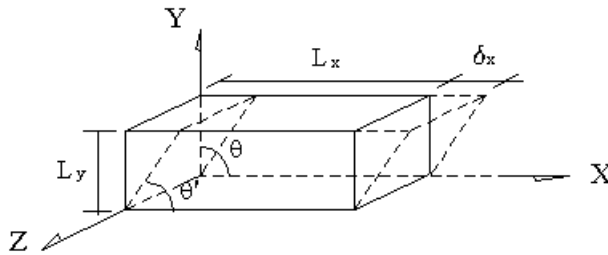


Figura 2.2 :Cisalhamento

$$\gamma_{xy} = \tan (\theta - \theta') \cong (\theta - \theta') , \quad (2.3)$$

e de modo análogo, obtém-se γ_{xz} e γ_{yz} .

Ressalta-se que os parâmetros $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ mostram como se comportam os segmentos L_x, L_y, L_z na vizinhança próxima do ponto analisado.

2.1 Parâmetros Básicos de Deformação

A geometria de deformação descrita na seção anterior é feita através dos parâmetros apresentados pelas eqs. (2.1) e (2.3), as quais determinam as alterações sofridas por três segmentos infinitesimais de reta (mutuamente perpendiculares antes da deformação), que se interceptam no ponto analisado. Deste modo, os parâmetros que descrevem esta geometria, são definidos a partir de três funções básicas $u(x,y,z), v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$ as quais são contínuas e analíticas, e representam os deslocamentos sofridos pelos segmentos dx, dy, dz .

A fig. 2.3 apresenta um corpo num sistema bidimensional, mostrando os deslocamentos representados pelas funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ como também distorções angulares representadas pelos ângulos α e β . Os parâmetros de deformação podem ser expressos como derivadas parciais de primeira ordem das funções deslocamento $u(x,y)$ e $v(x,y)$.

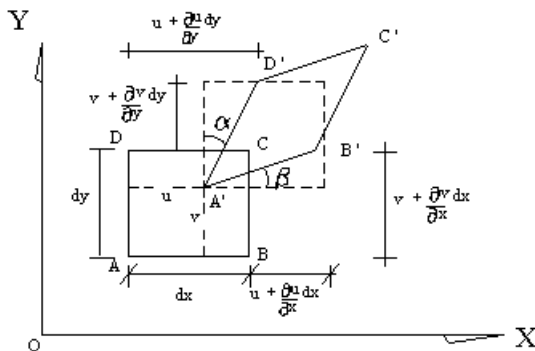


Figura 2.3 :Deslocamentos e distorções angulares

A deformação específica na direção do eixo OX é dado por (Kuang, 1996):

$$\epsilon_x = \delta_x / dx = \partial u / \partial x , \quad (2.4)$$

e generalizando para o caso tridimensional, tem-se que:

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y, (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \partial w / \partial z. (2.6)$$

A distorção angular é determinada em função dos ângulos α e β e para pequenas deformações, vem que:

$$\alpha = \partial u / \partial y, (2.7)$$

$$\beta = \partial v / \partial x, (2.8)$$

e a deformação de cisalhamento no plano XY é dada por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x, (2.9)$$

e por analogia em relação aos planos XZ e YZ, vem:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x, (2.10)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y. (2.11)$$

Pode-se agrupar os elementos básicos de deformação em forma da matriz **E**, chamada de Tensor de Deformação (de segunda ordem). Então tem-se (Kuang, 1996 ; Santos, 1999) :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y & \partial w / \partial z \end{bmatrix} (2.12)$$

e esta matriz pode ser decomposta analiticamente utilizando-se de uma propriedade dos tensores de segunda ordem, isto é, todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto na soma de outros dois tensores, sendo um simétrico e outro anti- simétrico (Vanicek & Krakiwsky, 1982). Então, para um caso bi- dimensional:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \frac{1}{2}(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \\ \frac{1}{2}(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) & \partial v / \partial y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial u / \partial y - \partial v / \partial x) \\ -\frac{1}{2}(\partial u / \partial y - \partial v / \partial x) & 0 \end{bmatrix} (2.13)$$

ou de um modo mais compacto,

$$\mathbf{E} = \varepsilon + \omega, (2.14)$$

onde a matriz ε é chamada de Tensor de Deformação Simétrica e representa a deformação enquanto que ω é denominada de Tensor de Deformação Anti- Simétrica representando o ângulo de cisalhamento.

2.2 Parâmetros de Deformação em Estruturas Geodésicas

As seções anteriores descreveram como é possível determinar a deformação de um corpo, quando sujeito a um carregamento através de seus parâmetros de deformação. Estes conceitos também podem ser aplicados para analisar deslocamentos em estruturas geodésicas provocadas ou por movimentos, por exemplo, de placas tectônicas ou detectados quando compara-se dois conjuntos de coordenadas oriundos de ajustamentos em épocas distintas.

Para a aplicação dos parâmetros de deformação em estruturas geodésicas, duas hipóteses serão adotadas (Silva, 1986):

- Admite-se que o processo de deformação subtendido pelas estruturas geodésicas, seja regido segundo as teorias de deformação homogênea e infinitesimal. Considera-se a vizinhança de um vértice de uma estrutura todos os vértices a ele conectado, fig. 2.4;
- A ordem de grandeza dos deslocamentos relativos de dois vértices vizinhos é pequena em comparação com a distância que os separa.

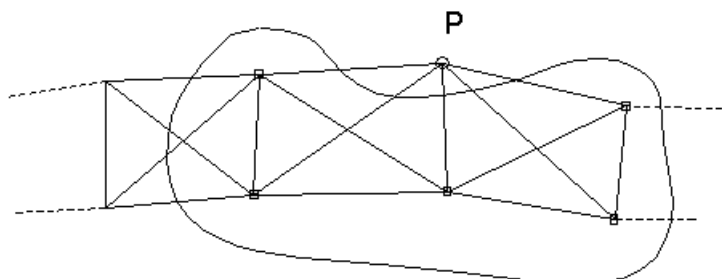


Figura 2.4 :Vizinhança do ponto P

Então, o modelo matemático da função deslocamento é da forma:

$$\mathbf{V}(x,y), (2.15)$$

que tem como componentes em relação a um sistema de coordenadas adotado:

$$u=u(x,y) , (2.16a)$$

$$v=v(x,y) , (2.16b)$$

no caso um sistema bidimensional. Estas funções podem ser desenvolvidas em um polinômio de primeira ordem, isto é:

$$u=u(x,y)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0) , (2.17a)$$

$$v=v(x,y)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(y-y_0) , (2.17b)$$

onde (x_0,y_0) são as coordenadas do vértice analisado e é a origem de uma sistema local de coordenadas, (x,y) as coordenadas do vértice vizinho. Os coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 podem ser aproximadas pelas derivadas parciais da função deslocamento que integram o tensor de deformação. Então:

$$a_1 = \partial u / \partial x , (2.18a)$$

$$a_2 = \partial u / \partial y , (2.18b)$$

$$b_1 = \partial v / \partial x , (2.18c)$$

$$b_2 = \partial v / \partial y , (2.18d)$$

e a_0, b_0 são funções das coordenadas do ponto analisado, ou seja:

$$a_0 = u(x_0,y_0) , (2.19a)$$

$$b_0 = v(x_0,y_0) . (2.19b)$$

Para a determinação dos parâmetros de deformação, considera-se conhecido o valor da função deslocamento em todos os vértices da estrutura. A obtenção desses valores pode ser feita, por exemplo, comparando-se observações coletadas em duas épocas diferentes, ou seja, para os ajustamentos (1) e (2), tem-se que (Santos, 1999):

$$u=u(x,y)= x^2 - x^1 , (2.20a)$$

$$v=v(x,y)= y^2 - y^1 . (2.20b)$$

O cálculo dos parâmetros de deformação (a_1, b_1, a_2, b_2) pode ser obtido através das eqs. 2.17a e 2.17b, para a vizinhança de cada vértice a ser analisado. Deste modo, considerando-se os n vértices vizinhos ao ponto P, de coordenadas (x_0,y_0) , as eqs. 2.17a e 2.17b tornam-se (Thapa, 1980; Silva, 1986; Santos, 1999):

$$u (x_1 , y_1) = a_0 + a_1 (x_1 - x_0) + a_2 (y_1 - y_0) ,$$

$$v (x_1 , y_1) = b_0 + b_1 (x_1 - x_0) + b_2 (y_1 - y_0) ,$$

....

....

$$u (x_n , y_n) = a_0 + a_1 (x_n - x_0) + a_2 (y_n - y_0) ,$$

$$v (x_n , y_n) = b_0 + b_1 (x_n - x_0) + b_2 (y_n - y_0) , (2.21)$$

ou de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ \vdots \\ u(x_n, y_n) \\ v(x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n - x_0) & (y_n - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_n - x_0) & (y_n - y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ \vdots \\ a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ou ainda:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{c} , (2.23)$$

onde $\mathbf{d}_{(2nx1)}$, $\mathbf{A}_{(2nx4)}$, $\mathbf{e}_{(4x1)}$ e $\mathbf{c}_{(2nx1)}$. A solução da eq. 2.23 é dada por:

$$\mathbf{e} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L} , (2.24)$$

com $\mathbf{L} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$,

e a solução da eq. 2.24 conduzirá aos parâmetros de deformação das eqs. 2.18.

A interpretação do significado dos parâmetros de deformação pode ser feita através da respectiva representação visual. A técnica para representação da deformação simétrica é similar à elipse de erros (Gemeal, 1994). Deste modo a elipse de deformação é definida a partir dos seus eixos principais de deformação que têm a direção dos autovetores do tensor de deformação simétrica. Os valores de seus semi-eixos maior e menor são os autovalores do referido tensor. Então tem-se que (Silva, 1986):

$$\lambda_{\max} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 2 + m, \quad (2.25)$$

$$\lambda_{\min} = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2 - m, \quad (2.26)$$

$$\text{sendo } m = [(\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 4 + \varepsilon_{xy}^2]^{1/2}.$$

A orientação da elipse de deformação, que orienta o seu eixo maior, é dada por:

$$\tan \theta = -[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) / \varepsilon_{xy}]. \quad (2.27)$$

O tensor de deformação admite autovalores positivos e negativos representando tração e compressão, respectivamente.

3 Análise de Deformação de uma Rede Geodésica Local

A fig. 3.1 mostra a região no litoral paranaense onde foram realizados os levantamentos geodésicos e situa-se entre os municípios de Matinhos e Pontal do Sul. Estes levantamentos formam uma Rede Geodésica Local (RGL), fig. 3.2, e é constituída de 17 pontos cujas coordenadas foram determinadas através do rastreamento dos satélites GPS em duas campanhas em épocas diferentes; a primeira foi em agosto de 1999 e a segunda em fevereiro de 2000.



Figura 3.1 :Região do Levantamento

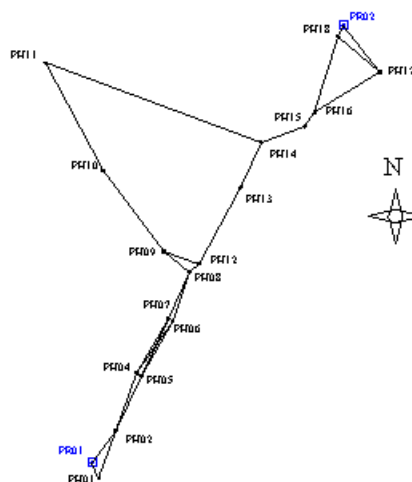


Figura 3.2 :Rede Geodésica Local

Nas Tabelas 3.1 e 3.2 estão listadas as coordenadas dos pontos em coordenadas geodésicas topocêntricas horizontais (WGS-1984) da RGL de acordo com as épocas das campanhas realizadas.

Tabela 3.1: Tabela Coordenadas geodésicas topocêntricas horizontais (1999).

Ptos	Coord. X (m)	Coord. Y (m)
PR01	150000.0000	250000.0000
PR02	166504.3967	279886.5956
PH04	152888.6836	256111.6952
PH05	153276.0874	255905.8318
PH06	155283.4888	259658.8633
PH07	154965.0259	259842.7013
PH08	156386.5999	263035.1065
PH10	150342.1384	269774.7704
PH09	154594.9267	264360.3315
PH11	146349.8499	276968.8935
PH12	157000.4601	263592.8119
PH16	164668.3537	273997.5586
PH17	169040.3975	276791.9827
PH18	166115.2308	279140.2837
PH14	161031.3701	271885.8598
PH15	164017.2346	273037.7308
PH13	159749.0865	268824.7044

PH02	151557.7471	252201.1355
PH01	150476.8825	248918.4965

Tabela 3.2: Coordenadas geodésicas topocêntricas horizontais (2000).

Coord. X (m)	Coord. Y (m)	
PR01	150000.0000	250000.0000
PR02	166504.3967	279886.5956
PH04	152888.6741	256111.6752
PH05	153276.0540	255905.8152
PH06	155283.3963	259658.8707
PH07	154965.0540	259842.7053
PH08	156386.5736	263035.1018
PH10	150342.0435	269774.8089
PH09	154594.7943	264360.3158
PH11	146349.8466	276968.8857
PH12	157000.3700	263592.8033
PH16	164668.3317	273997.5534
PH17	169040.4929	276791.9853
PH18	166115.0488	279140.2720
PH14	161031.3837	271885.8694
PH15	164017.2212	273037.7139
PH13	159749.0455	268824.7107
PH02	151557.5721	252201.1205
PH01	150477.2120	248918.5190

Então, os conceitos da Seção 2 foram aplicados nesta estrutura geodésica para fazer uma análise de modo a detectar possíveis deformações existentes. Para isso, todos os pontos desta estrutura foram analisados com seus respectivos vértices vizinhos. Por exemplo: considere-se o que o ponto PH06 (fig. 3.2) está sendo analisado, então ele tem como vizinhança os pontos PH04, PH05, PH07 e PH08. Esta estratégia é estendida a todos os pontos. Desta forma os parâmetros de deformação são obtidos pela eq. 2.24 cujas matrizes que a compõem têm como dimensões: $\mathbf{A}_{(104 \times 68)}$; $\mathbf{L}_{(104 \times 1)}$; $\mathbf{e}_{(68 \times 1)}$.

A Tabela 3.5 apresenta os resultados obtidos na aplicação da Análise de Deformação na RGL e ela é composta pelos semi-eixos da cônica e pelo seu ângulo de orientação (θ). A cônica de deformação será uma elipse quando os semi-eixos (auto- valores) forem positivos; no caso de um deles for positivo e o outro negativo a cônica será uma hipérbole de dois ramos e quando forem negativos tem-se uma elipse imaginária (Vanicek & Krakiwsky, 1982).

Tabela 3.5: Resultados.

Ptos	a	b	θ°
PH01	0.00028906223700	-0.00003663871747	-15.69035460893591
PH02	0.00001038073336	-0.00014059805007	79.69761223064772
PH04	0.00002226312200	-0.00002204536953	19.73307149748576
PH05	0.00001113785639	-0.00004054501243	88.76764541676144
PH06	0.00000594542908	-0.00018492183254	75.26056350740593
PH07	0.00000274929154	-0.00001920866969	77.37881445764371
PH08	0.0000000208229	-0.00001286738214	-80.59661600756023
PH09	0.00012966851087	-0.00001549635000	25.83274728540331
PH10	0.00013486719814	-0.00003695994726	5.54991830534956
PH11	0.00000009299552	-0.00000098847716	-5.88006944202291
PH12	0.00000820574118	-0.00003671779948	70.15045091035437
PH13	0.00000500806810	-0.00021929914267	72.67092796661387
PH14	0.00000134983414	-0.0000000201912	33.00272729764678
PH15	0.00002927189321	-0.00001359624984	85.86467569592374
PH16	0.00000358981118	-0.00000036945007	31.08510719946038

PH17	0.00002740483857	-0.0000071110868	-7.58973183806468
PH18	0.00004201323566	-0.00000994697473	-22.26829510906844

Observando-se a Tabela 3.5 verifica-se que a estrutura sofre uma deformação composta de trações, compressões e rotações. Uma maneira de se visualizar estes movimentos é plotar os semi- eixos da cônica (Vanicek & Krakiwsky, 1982) em cada um dos pontos conforme mostra a fig. 3.3, onde a linha azul indica tração enquanto que a vermelha representa a compressão.



Fig. 3.3 : Semi-eixos da cônica

4 Considerações Finais

Através dos resultados obtidos, pode-se concluir que a utilização dos conceitos de Mecânica dos Materiais para detectar possíveis deslocamentos dos pontos de uma estrutura geodésica, com vistas a análise de sua deformação, mostrou-se promissora. Diante disso, o método proposto é aplicável ao monitoramento de estruturas que venham a sofrer deformações, quer por causas geológicas ou outras quaisquer.

Um aspecto importante a ser considerado para o método proposto é com relação aos valores encontrados para os semi-eixos das cônicas nos pontos da RGL, pois apesar de terem ordem de grandeza inferiores a 10^{-3} , indicam deformações na estrutura oriundas das duas companhias realizadas. Deve-se também levar em consideração a presença dos erros sistemáticos que afetam as observações e que não podem ser completamente eliminados, tendo como conseqüência a influência na forma da estrutura geodésica.

5 Agradecimentos

Os autores expressam seus agradecimentos ao Eng. João Hipólito Xavier, mestrando do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR, pelo fornecimento das coordenadas dos pontos da RGL.

6 Referências Bibliográficas

- GEMAEL, C.:** *Introdução ao ajustamento das observações*, Editora UFPR, Curitiba, 1994.
- KUANG, E. P.:** *Geodetic network analysis and optimal design: concepts and application*, Ann Arbor Press Inc., Michigan, 1996.
- SANTOS, M. C.:** *Estabilidade das estruturas geodésicas*, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 1999.
- SILVA, M.C.D.:** *Aplicação da mecânica dos corpos deformáveis à análise de consistência de observações em redes geodésicas horizontais*, Dissertação (Mestrado em Geodésia), Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 1986.
- THAPA, K.:** *Strain as a diagnostic tool to identify inconsistent observations and constraints in horizontal geodetic networks*, Department of Surveying Engineering Technical Report, n. 68, University of New Brunswick, Fredericton, 1980.
- VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E. J.:** *Geodesy: the concepts*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.