

Desenvolvimento de um modelo matemático para geração de superfícies por interpolação linear a partir do gradiente do terreno

Rafael Lopes da Silva
Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE
Diretoria de Geociências – Departamento de Cartografia - DECAR
Av. Brasil, 15671 – Parada de Lucas – Rio de Janeiro
CEP 21241-051 Tel: 2142-4895
rafaelsilva@ibge.gov.br

RESUMO: O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo matemático para o cálculo das altitudes dos “nós” das grades de um modelo digital do terreno (MDT), utilizando interpolação linear, a partir do gradiente do terreno.

Neste trabalho foi selecionada uma área da folha Cunhambebe, editada pelo IBGE. As curvas de nível e os pontos cotados foram os dados utilizados na geração da grade de pontos. Por não existir pontos cotados suficientes na área, alguns pontos foram inseridos sobre as curvas de níveis, porém, na maioria deles foram executadas interpolações em função da equidistância entre as curvas. A distribuição dos pontos na aquisição de dados se deu de forma irregular. A grade do MDT foi gerada de forma regular.

Para o cálculo das altitudes foram utilizados 8 pontos de controles na interpolação de cada ponto da grade, de modo que cada quadrícula ao redor deste ponto possuía 2 pontos de controles.

ABSTRACT: The objective of this work is the development of a mathematical model for the calculation of the altitudes of points of the gratings of a digital terrain model (DTM), using linear interpolation, from the gradient of the terrain.

In this work an area of the Cunhambebe leaf was selected, edited for the IBGE. The vectorization of The curves of level and the quoted are data used in the generation of the grating of points. For not existing points quoted enough in the area, some points had been inserted on the curves of levels, however, in the majority of them interpolations in function of the equidistance between the curves had been executed. The distribution of the points in the acquisition of data if gave of irregular form. The grating of the DTM was generated of regular form.

For the calculation of the altitudes 8 points of control had been used in the interpolation of each point of the grating, in way that each grid around of this point possesss 2 points of control.

1 INTRODUÇÃO

No passado as técnicas para a representação altimétrica da superfície terrestre limitavam-se ao traçado manual de curvas de nível, a partir de levantamentos topográficos, ou por compilação utilizando-se técnicas fotogramétricas.

Em meados da década de 50, foram iniciados os trabalhos de modelagem numérica da superfície topográfica por um pesquisador do Instituto de Tecnologia de Massachusetts – MIT, Charles E. Miller. As pesquisas de Miller referiam-se a projetos rodoviários. Os primeiros Modelos Numéricos do Terreno foram elaborados a partir do levantamento das altitudes em uma grade planimétrica regular utilizando-se técnicas fotogramétricas.

Com a evolução da informática tornou-se mais intenso o uso de computadores na área da cartografia, facilitando a representação do terreno a partir de modelos matemáticos bem definidos.

Os modelos digitais de superfícies objetivam representar a ocorrência de um fenômeno de comportamento espacial, associado ao todo ou a uma determinada região da superfície terrestre. O modelo digital de uma superfície é gerado a partir de uma amostra de pontos (x,y,z) em que a variável (z) descreve um particular fenômeno. Os valores de (x,y) representam a localização planimétrica na região a ser trabalhada. Uma das aplicações mais conhecida é representada pelos Modelos Digitais do Terreno (MDT) empregados na representação do comportamento das altitudes, através de modelos matemáticos.

Um modelo digital do terreno consiste de um conjunto de dados que explicitam a posição planimétrica e a altitude, no terno de coordenadas (x,y,z) , do terreno. Neste caso, os valores de (x,y) indicam as coordenadas planimétricas e o valor de (z) indicará a altitude, a componente mais importante em se tratando do MDT.

A geração de modelos digitais do terreno compreende três fases operacionais: *aquisição de dados*, *modelagem* e *aplicações*.

2 AQUISIÇÃO DE DADOS

A fase principal do processo para geração do modelo digital do terreno resume-se a aquisição de dados, caracterizadas pelos levantamentos que irão permitir obter as coordenadas (X,Y,Z) que representem a superfície do terreno. O levantamento utilizado depende, principalmente, do tamanho da área a ser trabalhada e da precisão desejada.

A aquisição de dados não pode conduzir a um número insuficiente de pontos nem ser tampouco exagerada. A insuficiência de dados leva a geração de modelos não compatíveis com a realidade, descaracterizando o terreno. Já a quantidade excessiva de dados leva a sobrecarga do sistema com uso redundante da memória, prejudicando os resultados finais da modelagem.

Os dados para a geração de um modelo digital do terreno, geralmente, são adquiridos segundo procedimentos distintos:

- Por levantamentos topográficos;
- Por restituição fotogramétrica;
- Por digitalização de mapas pré-existentes.

Os pontos levantados por amostragem não devem ser escolhidos aleatoriamente. Deve-se selecionar os pontos notáveis que descrevam a superfície topográfica, sendo fundamental para a modelagem a caracterização das mudanças da morfologia do terreno.

Comparando os modelos digitais do terreno quanto à origem dos dados, ter-se-ão:

- *Por levantamento topográfico*: são utilizados equipamentos topográficos (teodolito, estações total e níveis) para a aquisição de dados; a precisão decorrente é considerada boa, limitando-se a cobertura a áreas específicas. As principais aplicações estão vinculadas ao planejamento e ao desenvolvimento de projetos para pequenas áreas;
- *Por restituição fotogramétrica*: são utilizados os estereocompiladores para a aquisição de dados; a precisão é alta, se a aquisição se der a partir de pontos cotados, e baixa se a partir de curvas de nível. Aplica-se a projetos de grandes dimensões territoriais especialmente em terrenos de difícil acesso. Suas principais aplicações estão vinculadas a projetos de represas-diques; reservatórios, rodovias e exploração de minas;
- *Por digitalização de mapas pré-existentes*: a digitalização pode ser semi-automática, automática ou manual; a precisão é baixa, se realizada a partir de curvas de nível em média e pequena escala, aplica-se a grandes extensões superficiais, cartograficamente representadas em escalas pequenas. As principais aplicações são atinentes à simulação de vãos e a representação do relevo para fins militares.

A distribuição dos dados levantados pode ser classificada, segundo a sua posição, em: regular, semi-regular e irregular. A distribuição regular é aquela em que a posição planimétrica (X,Y) dos pontos coletados está regularmente espaçada. A distribuição semi-regular é aquela que mantém uma regularidade na distribuição espacial na direção X ou Y, mas nunca nas duas direções. A distribuição irregular é aquela cuja posição planimétrica (X,Y) dos pontos coletados não possui regularidade na distribuição espacial.

Deve-se levantar pontos representativos da morfologia do terreno nos levantamentos topográficos, por isso não se deve confundir a distribuição irregular com uma distribuição aleatória, já que esta última é característica dos dados estatísticos.

3 MODELAGEM

A modelagem é a segunda etapa do processo de geração de um modelo digital do terreno. Nesta etapa, define-se qual o processo de interpolação e o tipo de grade será utilizado na geração do MDT. A escolha do processo de interpolação e do tipo de grade depende do objetivo da geração do MDT. Deve ser definido o processo de interpolação a utilizar que melhor represente o terreno de acordo com o objetivo do trabalho a ser realizado. Esta etapa subdivide-se em duas partes: *processos de interpolação e modelos de grades*.

Difícilmente os dados necessários para descrever uma determinada superfície existirão para a área que se deseja trabalhar. Uma distribuição discreta de pontos é capaz de descrever a superfície que se deseja trabalhar. Os processos de interpolação e os processos de aproximação são utilizados para descrever a superfície desejada a partir dos pontos coletados.

As teorias dos processos de interpolação e dos processos de aproximação possuem os mesmos objetivos, ou seja, encontrar uma categoria de funções mais simples possível que seja a expressão mais aproximada de uma função desconhecida descrita por uma dependência funcional entre suas variáveis.

A diferença principal entre as duas teorias encontra-se no fato de que para os processos de interpolação busca-se para uma dada função $f(x)$, a função $P(x)$ que passe pelos pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , onde $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$; enquanto que para os processos de aproximação busca-se a função aproximada $P(x)$ que se ajuste aos pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , segundo uma regra de aproximação escolhida. (Campos, 1994).

Os processos de interpolação podem ser subdivididos em: *Global, Local ou Pontual*.

O processo global possibilita determinar uma função que represente toda a área de interesse, conhecido como superfície de tendência. Este processo raramente é utilizado para grandes quantidades de pontos, já que o mesmo visa a solução de um sistema de expressões de grau igual ao número de pontos amostrados.

Para o processo local, subdivide-se o espaço de interesse em subespaços. E, para cada subespaço, é definida uma função de interpolação. O espaço é subdividido com o objetivo de descrever o comportamento do fenômeno por partes.

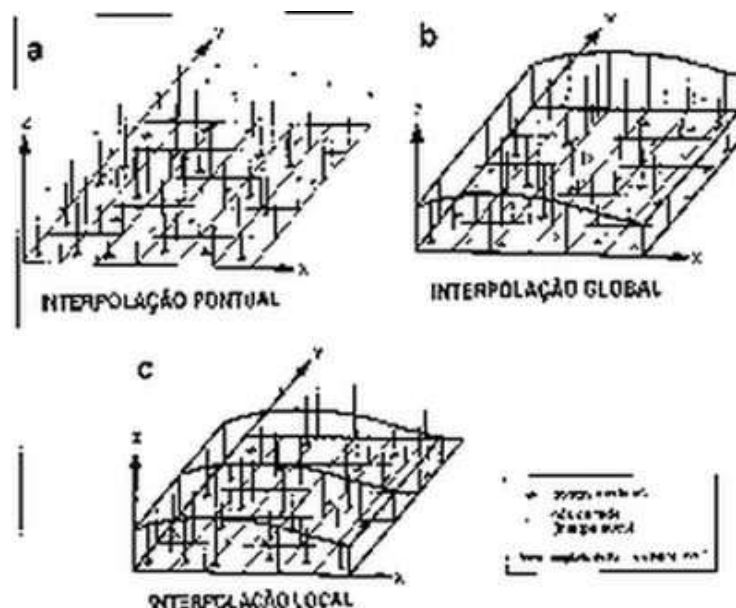


figura 1: Representação no espaço da interpolação pontual, global e local

No processo pontual os novos valores são interpolados utilizando-se somente os pontos de referência vizinhos. Com isso, a alteração de um determinado ponto afetará apenas os pontos próximos ao local da alteração.

Segundo Campos (1994), a comparação entre os métodos global, local e pontual não é tarefa simples, suas características e escopo nem sempre coincidem, não existindo unanimidade quanto aos critérios de avaliação: aspectos visuais, sensibilidade a parâmetros, tempo de processamento, necessidades de memória em sistemas computacionais e facilidades de implementação.

Apesar de ser muito difícil prever a forma que a superfície terrestre assume, as funções polinomiais são as funções que melhor a descrevem. A utilização desta categoria de funções deve-se a facilidade na manipulação de suas equações.

Os métodos de interpolação utilizados na geração de modelos digitais do terreno são do tipo tridimensionais.

Na interpolação tridimensional procura-se determinar uma função que descreva a superfície terrestre contendo as coordenadas espaciais (X, Y, Z). As coordenadas espaciais são obtidas a partir de diversas técnicas de aquisição de dados. No geral, as coordenadas X e Y são as variáveis independentes e Z é a variável dependente que indicará o fenômeno estudado.

A utilização de uma função polinomial que descreva o comportamento da superfície terrestre é o processo mais simples para determinar uma interpolação tridimensional global.

Devido ao alto número de pontos utilizados, este processo é inadequado para aplicações em MDT. O polinômio, neste caso, torna-se instável à medida que seu grau é aumentado.

Para o problema da interpolação tridimensional, a interpolação local é a solução mais adequada. O espaço é subdividido em subespaços e, com isso, determina-se uma função espacial simples para cada subespaço. Este processo é utilizado pela maioria dos programas aplicados a modelos digitais do terreno.

Os processos de interpolação tridimensional local, de alguma forma, são mais fáceis de compreender e simples de aplicar. Dentre os processos existentes, os mais comuns são:

- *Interpolação pela média aritmética* - Este processo de interpolação é considerado muito simples, pois calcula o valor interpolado pela média dos valores dos pontos mais próximos ao ponto que se deseja interpolar. Este processo possui as desvantagens de ser empírico e de exigir a definição de uma vizinhança.
- *Interpolação pela média ponderada* - Este processo também determina a média dos valores comuns ao vizinho do ponto a ser interpolado, porém o processo consiste em ponderar cada valor, ou seja, cada valor possui um peso. Para definir o valor de W_j , várias funções foram propostas, algumas delas são: $(1/d)$, $(1/d^2)$, e^{-kd} e e^{-kd^2} , onde d é a distância entre o ponto a interpolar e os pontos de referência.

Um processo de aproximação define-se como a função contínua capaz de descrever aproximadamente o comportamento matemático de uma experiência a qual só se conhecem os seus valores discretos, segundo uma regra de aproximação.

A escolha da regra de aproximação é um fator de peso para a determinação de uma função de aproximação.

O processo de aproximação mais utilizado é o processo de aproximação pelo método dos mínimos quadrados.

Para aplicações particulares deve-se adaptar o método dos mínimos quadrados ao caso particular. A aproximação por este método se adapta facilmente a um grande número de problemas. Por exemplo, conhecer os valores mais próximos de uma série de observações. Além de ser utilizada para aproximar uma função onde se deseja conhecer os valores entre pontos medidos. O método dos mínimos quadrados é baseado na condição de que a soma dos quadrados dos erros residuais seja mínima.

O levantamento dos dados representativos da superfície em estudo, a edição dos dados amostrados e a criação do modelo propriamente dito são fatores fundamentais na geração de um modelo digital do terreno.

Na elaboração dos modelos digitais do terreno dar-se ênfase à geração das grades. As grades irão formar uma rede geométrica que modelará a superfície do terreno, localmente.

Segundo (Campos, 1994), a partir de uma amostra de pontos, constrói-se uma grade regular ou irregular. Para as grades irregulares as coordenadas dos pontos das respectivas grades são as mesmas dos pontos levantados e, para as regulares, calcula-se as altitudes dos pontos das grades, a partir dos quais define-se a superfície.

As grades regulares aproximam a superfície de interesse por meio de polígonos de faces regulares que podem ser: quadradas, retangulares, triangulares ou hexagonais.

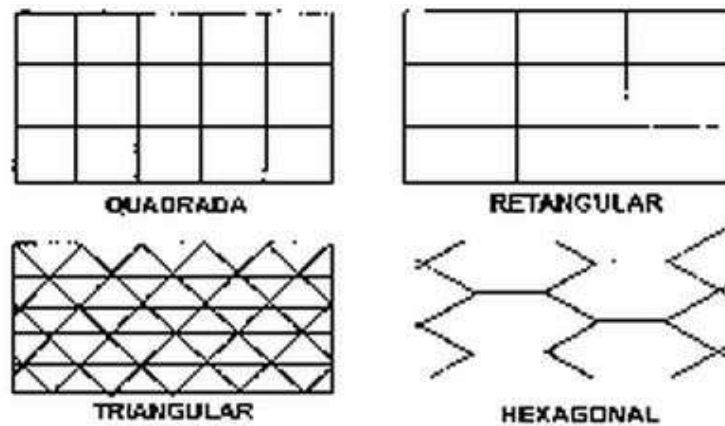


figura 2: Tipos de grades regulares

Por meio de processos de interpolação, são estimados os valores das coordenadas em cada ponto da grade gerada a partir dos pontos levantados, já que os levantamentos necessários dificilmente são executados, exceto se forem empregados processos fotogramétricos.

A grade quadrada é a grade regular mais utilizada na geração de um MDT, por possuir elementos simples, de fácil armazenamento computacional. Por utilizar uma matriz que grava a cota Z de cada ponto, dispensa o armazenamento das coordenadas X e Y, que ficam implícitos na posição (i,j) do elemento da matriz, ocupando, assim, menos memória.

De acordo com (Campos, 1994), apesar das facilidades na implementação das grades regulares, a partir da década de 80 chegou-se ao consenso de que a geração das grades irregulares diretamente sobre os pontos levantados representa melhor o terreno a ser modelado.

A aproximação do terreno por meio das grades irregulares se dá através de poliedros de faces com dimensões irregulares variáveis, sendo mais utilizadas os poliedros triangulares.

O TIN (Triangular Irregular Network) é o tipo de grade que tem sido utilizado nos programas computacionais para a modelagem do terreno. Este tipo de grade descreve melhor o terreno devido à facilidade que a triangulação oferece na incorporação ao modelo dos pontos notáveis do terreno, como por exemplo, as linhas de quebra (breaklines), tais como talvegues, divisores de água, taludes, áreas mortas e linhas de estrutura.

4 APLICAÇÕES

A aplicação de um modelo digital do terreno possibilita o estudo e a análise de um determinado fenômeno sem a necessidade de se trabalhar no local da área modelada.

As aplicações relacionadas à área modelada podem ser qualitativas, como a visualização do modelo em projeção plana, ou quantitativas, como o cálculo de volumes.

As aplicações de modelos digitais de terreno mais utilizadas são:

- Visualização de modelos em projeção planar;
- Geração de imagens de níveis de cinza, sombreadas e temáticas;
- Geração de mapas de curvas de nível, de declividade, de visibilidade e de drenagem;
- Análises de perfis sobre trajetórias pré-determinadas;
- Cálculo de volumes de aterro e corte.

5 UMA APLICAÇÃO TÍPICA

A superfície terrestre pode ser representada por meio de um modelo digital do terreno, a partir de um conjunto de coordenadas tridimensionais conhecidas. Para isto, gera-se uma grade de pontos, utilizando um processo de interpolação que irá resultar nos valores das altitudes dos respectivos pontos, além de definir o tipo de grade que será utilizado na geração do modelo digital do terreno.

Como a grade de pontos gerada é composta por latitude, longitude e altitude, pode-se dizer que a simples apresentação da grade é suficiente para demonstrar o modelo digital do terreno.

Na aquisição de dados utilizou-se a folha de Cunhambebe na escala 1:50.000, editada pelo IBGE. A carta foi digitalizada matricialmente, por meio de scanner, tornando-se uma imagem raster. Para que esta imagem seja utilizada na geração de um MDT é necessário referi-la ao terreno. Como a própria apresenta a malha de coordenadas planas (UTM), basta selecionar o programa adequado para referenciar esta imagem.

O programa selecionado para associar a imagem ao sistema terrestre foi o módulo CAD Overlay 2000, do AutoCad Map 2000. Para referir ao terreno, deve-se selecionar nove pontos bem distribuídos na imagem e anotar as coordenadas planas, para depois inseri-las na imagem, utilizando o comando "Rubber Sheet". Feito isso, as coordenadas planas reais podem ser obtidas da imagem. Neste trabalho foi selecionada uma área da folha para ser vetorizada e utilizada na geração da grade de pontos, apresentando, assim, o modelo digital do terreno. Há apenas a necessidade da vetorização das curvas de nível e dos pontos cotados, pois estes serão os dados utilizados na geração da grade de pontos. Caso não houver pontos suficientes e compatíveis com os critérios estabelecidos para a geração da grade, basta interpolar os pontos utilizando, para isto, as curvas de nível. A distribuição dos pontos na aquisição de dados se deu de forma irregular, não se tendo a preocupação de obter dados regularmente espaçados.

A descrição do modelo matemático para a geração do modelo digital do terreno, que neste caso é uma interpolação linear, será subdividida em três partes: *Altitude do ponto da grade*, *Peso em função das distâncias* e *Gradiente do ponto da grade*.

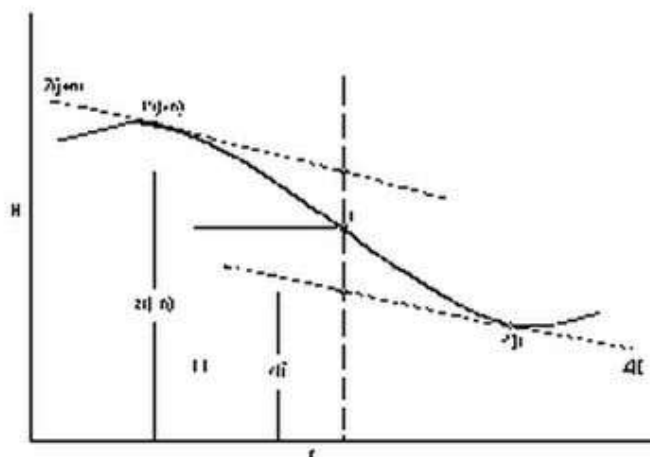


figura 3: Interpolação linear de um ponto da grade do MDT utilizando dois pontos de controle

Para o cálculo da altitude de um ponto da grade utilizou-se o somatório dos produtos das altitudes interpoladas pelos pesos em função das distâncias relativas aos pontos de controle e às elevações dos planos tangentes aos mesmos pontos de controle quando passam pela normal à superfície do ponto da grade. Logo, a expressão para o cálculo da altitude será dada da seguinte forma :

$$Hi = \sum_{j=1}^{k'} Wj * Zj$$

Onde:

- Wj é o peso definido como uma função da distância de cada ponto de controle em relação a um ponto da grade;
- Zj é a elevação do plano tangente na interseção com a normal à superfície do ponto da grade;
- Hi é a altitude do ponto da grade que se deseja calcular.

Cada valor de elevação Zj possui um peso em função das distâncias dos pontos de controle a um ponto da grade. A expressão para o cálculo do peso pode ser escrita da seguinte forma:

$$Wj = \frac{\{(1 - Rj)^2 * Rj^{-2}\}}{\sum_{l=1}^{k'} (1 - Rl)^2 * Rl^{-2}}$$

O valor de Rj dado pela razão entre a distância corrente do ponto de controle ao ponto da grade e a distância do ponto de controle mais afastado em relação ao ponto da grade. Rl tem o mesmo significado de Rj e é calculado da mesma forma. A notação Rl é utilizada para não confundir com Rj .

As expressões de Rj e Rl podem ser escritas da seguinte forma:

$$Rl = \frac{rl}{rk'}$$

$$Rj = \frac{rj}{rk'}$$

Onde: $rl = rj$ é a distância entre o ponto de controle e o ponto da grade;
 rk' é a distância entre o ponto de controle mais afastado e o ponto da grade .

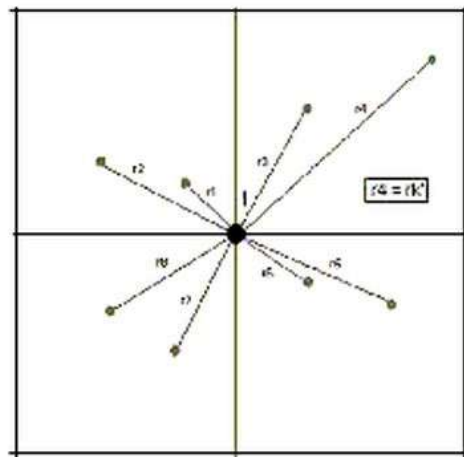


figura 4: Distâncias entre os pontos de controles e o ponto da grade i

Os valores de r_l e r_k são calculados por meio da seguinte expressão:

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Para que a expressão do cálculo da altitude esteja correta o somatório dos pesos deve ser igual a 1 (um). Logo, o cálculo dos pesos deve satisfazer a seguinte condição:

$$\sum_{j=1}^{k'} W_j = 1$$

O valor máximo de W_j será 1 (um), quando $j = i$ e o valor mínimo 0 (zero), quando $j = k'$.

Considerando que F_i é uma função em x , y e z , a equação do plano tangente à superfície em um ponto da grade, será dada por:

$$F_i = (x_i, y_i, z_i) = A'_i + B'_i * x_j + C'_i * y_j + D'_i * z_j = 0$$

onde z_j é a altura do plano tangente sobre um plano de referência em (x_j, y_j) . Por tanto, como o gradiente da superfície do terreno é proporcional ao vetor normal N_i superfície do ponto da grade. Portanto,

$$\text{Gradiente} = \nabla F_i = B'_i i + C'_i j + D'_i k \cong N_i$$

Onde ∇ é o operador matemático, na seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) k$$

Como o gradiente da superfície é proporcional ao vetor normal à superfície do ponto da grade, tem-se que as componentes do vetor normal à superfície são:

$$N_{x,i} \cong B'_i$$

$$N_{y,i} \cong C'_i$$

$$N_{z,i} \cong D'_i$$

A equação particular do plano tangente que é determinado no ponto da grade por:

$$A_i = \frac{A'_i}{D'_i} = -B'_i * x_i - C'_i * y_i - z_i$$

Onde:

$$N_{x,i} = B_i = \frac{B'_i}{D'_i}$$

$$N_{y,i} = C_i = \frac{C'_i}{D'_i}$$

E em qualquer (x_j, y_j) , tem-se:

$$Z_j = Z_j(x_j, y_j) = -A_i - B_i * x_j - C_i * y_j = z_j$$

Para cada ponto de controle existirá um plano tangente e, conseqüentemente, um valor de Z_j . E cada ponto da grade possui um gradiente com os seus respectivos coeficientes A, B e C.

As variáveis x_j e y_j são posições relativas, e como estão sendo utilizadas coordenadas planas na projeção Transversa de Mercator, o cálculo de x_j e y_j é feito da seguinte forma:

$$x_j = E_j - E_i$$

$$y_j = N_j - N_i$$

Para achar os valores de Z_j em cada ponto de controle é necessário o cálculo dos coeficientes do gradiente A_i , B_i e C_i , já que os valores x_j e y_j são conhecidos. Cada gradiente do ponto da grade é determinado utilizando-se o método dos mínimos quadrados, o modelo paramétrico:

$$X = (A^T P A)^{-1} (A^T P L)$$

Onde:

X é a matriz dos coeficientes do gradiente, que se deseja calcular;

A é a matriz dos valores conhecidos x_j e y_j ;

L é a matriz das altitudes dos pontos de controle.

Para o cálculo das altitudes foram utilizados 8 pontos de controle, distribuídos irregularmente, na interpolação de cada ponto da grade, de modo que cada quadrícula ao redor deste ponto possua 2 pontos de controle.

Por não existir pontos cotados suficientes na área, alguns pontos foram inseridos sobre as curvas de nível, porém, na maioria deles foram executadas interpolações utilizando a seguinte expressão:

$$h_j = \frac{h * d'}{d}$$

Onde: h_j é o ponto interpolado;

h é a equidistância entre as curvas de nível, em metros;

d' é a distância, em metros, entre a curva de nível e o ponto interpolado;

d é a distância entre as curvas de níveis adjacentes ao ponto de controle, em metros.

O espaçamento utilizado na grade regular foi de 150 metros para a área que continha as curvas de níveis equidistantes de 20 metros.

Na execução dos cálculos utilizou-se o programa MathCad 8.0 Professional, por ser um programa de fácil entendimento e que suporta a seqüência de cálculos que compõem o modelo matemático apresentado.

Para a apresentação gráfica das grades regulares dos modelos digitais do terreno, utilizou-se o programa AutoCad Map 2000.

6 CONCLUSÕES

Os resultados dos cálculos das altitudes para a área em estudo foram satisfatórios. A equidistância das curvas de nível da folha utilizada é de 20 metros. A precisão, de acordo com as normas cartográficas, é de ½ equidistância, portanto os resultados obtidos possuem tolerância de 10 metros, para este caso.

A aplicação do modelo matemático é melhor quando se utilizam áreas planas ou com valores

próximos de altitudes. Quando a área em estudo possui valores próximos, os resultados das altitudes se aproximam do valor real, conseguindo alcançar resultados bem abaixo da tolerância, como foi visto em alguns pontos de grade calculados neste trabalho.

Para que este modelo matemático alcance resultados satisfatórios, é necessário levar em consideração o número de pontos de controle e o espaçamento da grade regular. Para os resultados encontrados foram utilizados 8 pontos de controle e espaçamento de 150 metros na grade regular. Foram executados testes aumentando o número de pontos de controle e os resultados ultrapassaram a tolerância permitida em todos os pontos da grade. A contrário deste, foram executados testes diminuindo o número de pontos e os resultados obtidos foram melhores mas não confiáveis, já que o baixo número de pontos de controle na geração de um MDT pode induzir ao erro e não representar a realidade do comportamento do terreno.

Os pontos da grade cujos valores das altitudes ultrapassaram as tolerâncias permitidas podem ser representados de uma forma melhor. Neste caso, quando o terreno possuir grande variação altimétrica, deve-se diminuir o espaçamento para uma melhor representação da área estudada. Porém, é necessário ter o cuidado para não sobrecarregar o modelo, inserindo uma excessiva quantidade de pontos de controle.

De acordo com os resultados obtidos, o modelo matemático atendeu às expectativas esperadas. Torna-se possível, então, a representação do terreno utilizando o modelo matemático desenvolvido e apresentado nesta monografia.

Futuramente, o modelo matemático pode ser implementado em uma linguagem de programação (por exemplo, Visual Basic, Delphi ou C), trazendo mais rapidez na execução dos cálculos para a geração da grade regular do modelo digital do terreno.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUENO, J. M. R. – Modelos Digitais de Terreno e Análise Morfoestrutural dos Maciços Alcalinos de Itatiaia e Passa – Quatro: Dados preliminares. Rio Claro.

CAMPOS, I.O. - Análise de técnicas para o estabelecimento de Modelos Digitais de Terrenos – DTM, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.1994.

CARVALHO, M. S. , PINA, M. F. e SANTOS, S. M. – Conceitos básicos de Sistema de Informação geográfica e Cartografia Aplicada à Saúde. Editora Organização Pan Americana da Saúde/ Ministério da Saúde. Brasília, 2000.

CAMPOS, FILHO, F. F – Algoritmos Numéricos. Editora LTC. Minas Gerais, 2001.

DESTRI, A. R. – Tratamento de Modelos Numéricos do Terreno (DTM) obtidos por processos fotogramétricos. Dissertação de Mestrado, IME Rio de Janeiro, 1987.

FELGUEIRAS, C. A. – Análises sobre modelos digitais de terreno em ambiente de sistemas de informações geográficas. Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, São José dos Campos, 1987.

FIZ, P. R. – Cartografia básica. Editora Centro Universitário La Salle. Canoas, 2000.

FREITAS, S.R.C. et al – Geração de Modelo digital do Terreno para a Região metropolitana de Curitiba com interpolação Esferoidal – Anais do Congresso Brasileiro de Cadastro Multifatorial COBRAC 2000. UFSC. Florianópolis, 2000.

FURKIM, A . J. ; FALAT, D. R. ; TAVARES, M. M. ; SALLEM, F. ; SILAS; KRAEMER, S.M. – Uso de Ortofotocartas Digitais. Paraná.

GEMAEL, C. - Introdução ao Ajustamento de Observações. Editora UFPR. Curitiba, 1994.

GORDINI, C. L. J. – Topografia Contemporânea. Editora UFSC. Florianópolis, 2000.

IBGE. Curso de Cartografia Moderna. Rio de Janeiro, 1993.

JONES, R. L. – A Generalized Digital Contouring Program. Washington D. C. 1971.

LANCASTER, P. e SALKAUSKAS, K. – Curve and Surface Fitting Na Introduction. Academic Press, Harcourt Brace Jovanovch, Publishers, Toronto, 1986.

MILITÃO, J. G. O. e CARVALHO, P. C. P. – Uma Metodologia para Posicionamento de Prédios em Terrenos acidentados. Rio de Janeiro.

ROCHA, C.H.B. - Geoprocessamento – Tecnologia Transdisciplinar. Editora do autor. Juiz de Fora. 2000

SIMÃO, A. J. V. e CARVALHO, M. M. R. – Aplicação de Modelos Digitais de Terreno ao Estudo Físico do Território.

VIDAL, C. A. e SILVA, A. N. – Modelos Digitais de Terrenos: Importância do pré-processamento na Entrada de Dados. Ceará.