

Estudo dos métodos de ajustamento envolvidos na análise dos processos de integração e densificação de redes geodésicas

**Maria Lígia Chuerubim
João Carlos Chaves**

UNESP – Departamento de Cartografia
Rua Roberto Simonsen, 305 – CP 467
19060-900 Presidente Prudente SP
mchuerubim@gmail.com
jcchaves@fct.unesp.br

Resumo: Este artigo descreve métodos alternativos de ajustamento envolvidos no processo de integração e densificação de redes geodésicas, em função da necessidade de se identificar e analisar as distorções inerentes a estes processos, bem como enfatizar a viabilidade de cada método descrito. Desta forma, estudos envolvendo diferentes técnicas de posicionamento espacial tem sido realizados com o intuito de se obter precisões compatíveis com os níveis internacionais, possibilitando o estudo de fenômenos de grande complexidade como o monitoramento de movimentos da crosta terrestre (níveis globais, regionais ou locais), controle e segurança de estruturas, e especialmente no estabelecimento de redes geodésicas de alta precisão em território nacional.

Palavras chaves: ajustamento de redes, integração e densificação.

Abstract: This article describes involved alternative methods of adjustment in the integration process and densification of geodesic nets, in function of the necessity in if identifying and analyzing the inherent distortions to these processes, as well as emphasizing the viability of each described method. In such a way, studies involving different techniques of space positioning have been carried through with the intention of if getting compatible precisions with the international levels, making possible the study of phenomena of great complexity as the control of movements of the terrestrial crust (global, regional or local levels), control and security of structures, and especially in the establishment of geodesic nets of high precision in domestic territory.

Keywords: adjustment of nets, integration and densification.

1 Introdução

A revolução tecnológica marcada pelo advento de modernas tecnologias de posicionamento espacial como o GPS (*Global Positioning System*) e a conseqüente transição dos sistemas de referência de um sistema local para um geocêntrico, visando atingir níveis de acurácia compatíveis com os níveis internacionais, torna necessário estudos relacionados à integração e densificação de redes geodésicas, bem como das decorrentes distorções inerentes a estes processos.

A estrutura de uma rede geodésica pode ser caracterizada por um conjunto de pontos materializados no terreno e conectados entre si, cujas posições foram determinadas por meio de observações e cálculos rigorosos. Isto possibilita a utilização destes resultados em diferentes aplicações geodésicas que necessitem de alta precisão como: monitoramento de movimentos da crosta terrestre (níveis globais, regionais ou locais); controle e segurança de estruturas, estudos relacionados à ionosfera, agricultura de precisão, redes geodésicas de alta precisão passivas ou ativas, entre outros.

No que concerne ao estabelecimento de redes geodésicas, a integração é considerada, em um sentido mais amplo, como a estrutura mínima necessária ao estabelecimento de futuros levantamentos, que podem ser adicionados a redes geodésicas já existentes a partir de métodos de ajustamento, ou ainda por processos de densificação de redes.

O problema existente na integração de uma rede geodésica decorre das mudanças de coordenadas das estações de referência, bem como de suas respectivas matrizes-covariância (MVC), isto é, se levantamentos adicionais realizados em épocas distintas, são incluídos a rede original ajustada, as coordenadas e a MVC das estações da nova rede serão, em geral, diferentes dos valores estimados para as mesmas, em função da presença de erros grosseiros e sistemáticos. As magnitudes destas diferenças dependem, fundamentalmente, da qualidade das redes primária e secundária.

À medida que as redes vão sendo implantadas, faz-se necessário sua vinculação àquelas já disponíveis, de modo que cada nova rede seja considerada uma extensão ou densificação das anteriores, o que requer ainda no planejamento do levantamento, que sejam ocupados vértices de redes contíguas, de modo a gerar uma conexão entre as mesmas.

No ajustamento dos vetores observados em rede, com pontos de conexão, o número de vetores independentes, resultantes do processamento, é maior que o número de estações a serem determinadas, ou seja, há observações redundantes. Esse fato pode ser aproveitado para detectar e eliminar vetores com erros grosseiros, além de tornar compatíveis as coordenadas dos diferentes polígonos observados, e avaliar a qualidade das posições encontradas no ajustamento primário, as quais deverão ser reajustadas conjuntamente em uma rede.

Atualmente, existem variados métodos de ajustamento utilizados no estudo de redes como, por exemplo, ajustamento por aproximação dinâmica, aproximação por Blaha, transformação aproximada, controle-fixe aproximado. Porém, tais métodos não são recomendados no processo de ajuste de redes geodésicas, no âmbito da densificação e da integração, já que não possibilitam a detecção e análises de distorções de forma acurada, o que não atende as necessidades dos levantamentos geodésicos.

Nesta perspectiva, adotaram-se os métodos de ajustamento por estações ponderadas e seqüencial como métodos alternativos de integração, visando a manutenção de coordenadas estáticas e a minimização da propagação de distorções por toda a rede, e ainda o método de ajustamento por injunções mínimas para análises de densificação contribuindo, portanto, ao processo de avaliação das distorções (*misfits*) presentes no processo de reajustamento de redes geodésicas.

2 Métodos de ajustamento e modelos matemáticos

O ajustamento de observações tem por objetivo avaliar a qualidade das observações, detectar e eliminar aquelas que apresentarem erros grosseiros, estimar um único valor para cada parâmetro, de forma que a soma dos quadrados dos resíduos seja mínima e, finalmente, avaliar a precisão dos parâmetros estimados (GEMAEL, 1994).

Neste capítulo segue a descrição dos métodos de ajustamento pelo método seqüencial, ajustamento pelo método das estações ponderadas e, finalmente, o ajustamento com injunções mínimas.

2.1 Ajustamento pelo Método Seqüencial

A solução pelo método seqüencial baseia-se na divisão do conjunto de observações em grupos, com os quais se executa um tratamento seqüencial de ajustamento, ou seja, acrescenta-se aos grupos já ajustados, dos quais resulta uma estimativa da solução, um novo grupo de observações (ANTUNES, 1996). O acréscimo de observações ao grupo original, implica numa correção da estimativa da solução já existente, o que conduz a uma nova estimativa, matendo-se a correlação entre os grupos considerados.

De acordo com Antunes (1996), para a simplificação da dedução do modelo matemático, considera-se que o conjunto de observações seja composto por apenas dois grupos. Assim sendo, os dois modelos estocásticos e funcionais podem, respectivamente, serem definidos por:

$$\begin{aligned} L_{1_a} &= F_1(X) \\ L_{2_a} &= F_2(X) \end{aligned} \quad P = \begin{bmatrix} P1 & 0 \\ 0 & P2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sum_1^{-1} & 0 \\ 0 & \sum_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Linearizando o modelo funcional e adotando, por questões de simplificação de notação, X em vez de DX, o sistema de equações lineares por uma pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 X + L_1 \\ V_2 &= A_2 X + L_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

com $L_i = F_i(X_0) - L_{ia} |_{i=1,2}$; $A_1 = \frac{\partial F_1}{\partial X} \Big|_{1_0, X_0}$; $A_2 = \frac{\partial F_2}{\partial X} \Big|_{2_0, X_0}$.

Aplicando-se o MMQ no sistema (2.2), tem-se a minimização da forma quadrática fundamental dada por

$$\mathcal{O}(V_1, V_2, K_1, K_2, X) = V^T P V_1 + V^T P V_2 - 2K_1^T (V_1 - A_1 X - L_1) - 2K_2^T (V_2 - A_2 X - L_2) \quad (2.3)$$

Resolvendo e simplificando as equações resultantes da condição de minimização (2.3), obtém-se o sistema de equações normais, relativo ao sistema linear (2.2).

$$\begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T \\ A_2 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ -K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^T P_1^{-1} L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

No sistema de equações (2.4), identifica-se às equações normais associadas ao sistema (2.2), o qual admite as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} X^* &= -N_1^{-1} U_1 & (V^T P V) &= -U_1^T N_1^{-1} U_1 + L_1^T P_1 L_1 \\ Q_{X^*} &= N_1^{-1} & \Delta &: \frac{V^T P V}{n_1 \cdot u} \end{aligned} \quad (2.5)$$

com $N_1 = A_1^T P_1 A_1$ e $U_1 = -A_1^T P_1 L_1$.

Por meio das expressões de estimativa (2.5), pode-se obter soluções do sistema (2.4) na forma seqüencial ou recursiva:

$$V^T P V = V^T P V^* + \Delta (V^T P V) = (V^T P V^*) + (A_2 X^* + L_2)^T T (A_2 X^* + L_2) \quad (2.6)$$

onde $T = (P_2^{-1} + A_2 N_1^{-1} A_2^T)^{-1}$.

Da mesma forma, aplica-se a propagação de variâncias-covariâncias para se obter a expressão seqüencial para matriz cofator dos parâmetros:

$$Q_X = Q_{X^c} + \Delta Q_X = Q_{X^c} - N_1^{-1} A_2^T T A_2 N_1^{-1} \quad (2.7)$$

Por fim, tem-se que a variância a posteriori é dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{n_1 + n_2 - u} \quad (2.8)$$

onde: n_1 e n_2 são os respectivos números de observações dos dois grupos e u o número de parâmetros do sistema.

O método seqüencial é recomendado para identificar causas de distorções em redes já que neste método, as parcelas da densificação, ou controle de redes, pode ser seqüencialmente adicionado, e assim analisadas separadamente, durante a integração.

2.2 Ajustamento pelo Método das estações ponderadas

Este método é o mais indicado ao processo de integração de redes, já que utiliza a MVC de uma faixa de controle ao redor da densificação. Esta faixa deve incluir estações comuns em ambas as redes. A MVC é introduzida junto às coordenadas das estações de controle e as observações da densificação, dentro dos rigorosos critérios do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Segundo *Steeves e Penton* (1985), considerando-se um vetor de observações I , e sua respectiva MVC, C_I , bem como as coordenadas das estações de controle pelo vetor I_x e matriz MVC é C_{I_x} , e denominando por X as coordenadas estações obtidas após a integração tem-se:

$$x - I_x = 0 \quad (2.9)$$

Cuja linearização pela expansão da série de Taylor é dada por:

$$A_{I_x} \delta_c + B_{I_x} r_x + w_x = 0 \quad (2.10)$$

Onde A_{I_x} e B_{I_x} são as matrizes formadas pelos elementos são obtidos pela derivadas parciais da equação (2.9), respectivamente, em função de x_c e I_x . O vetor das correções iniciais de x_c é dado por δ_c , enquanto r_x é o vetor dos resíduos de I_x e w_x .

Similarmente, pode-se escrever o modelo linearizado para as equações de observação I como:

$$A_c \delta_c + A_D \delta_D - r_I + w_I = 0 \quad (2.11)$$

Em que os índices C e D referem-se, respectivamente, ao controle e a densificação. Desta forma, combinando-se as equações (2.10) e (2.11) e aplicando o MMQ obtém-se:

$$\hat{\delta} = (A^T P A)^{-1} A^T P W \quad (2.12)$$

Onde:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_C \\ \hat{\delta}_D \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} A_C & A_D \\ I & 0 \end{bmatrix}; P = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} C_l^{-1} & 0 \\ 0 & C_{l_x}^{-1} \end{bmatrix} \text{ e } w = \begin{bmatrix} w_l \\ w_x \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

O vetor \hat{r} é o estimador dos resíduos e é dado por:

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \hat{r}_l \\ \hat{r}_x \end{bmatrix} = A \hat{\delta} + w \quad (2.14)$$

O estimador dos parâmetros é dado por:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_C \\ \hat{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_C \\ \hat{\delta}_D \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Onde: \hat{x}_C e \hat{x}_D são os valores dos parâmetros obtidos iterativamente pelas equações (2.12) e (2.15). A associação com a MVC é dada por:

$$C_x = (A^T P A)^{-1} \quad (2.16)$$

No qual assume-se que o fator de variância a priori é desconhecido e a solução é única. A matriz pode ser definida como:

$$C_x = \begin{bmatrix} C_{x_C} & C_{x_C, x_D} \\ (C_{x_C, x_D})^T & C_{x_D} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

As variações nas coordenadas das estações é dada por:

$$\Delta \hat{x}_C = \hat{x}_C - l_x \quad (2.18)$$

que também é o estimador residual de \hat{r}_x das observações l_x . Isto pode ser facilmente considerado na expressão para a estimação dos resíduos para os casos em que o modelo de observações for linear, isto é:

$$\hat{r}_x = A_{l_x} \hat{x}_C - l_x = \hat{x}_C - l_x, A_{l_x} = I \quad (2.19)$$

As novas coordenadas e as coordenadas estimadas são disponibilizadas para todas as estações incluídas.

Este método apresenta algumas desvantagens, já que depende de informações estatísticas para finalidades de análise, já que não permite a identificação de mudanças significativas nas variações de coordenadas, e ainda é limitado pelo tamanho da faixa (extensão da rede), o que implica em uma maior complexidade se as distorções forem significativas.

2.3 Ajustamento pelo Método das inunções mínimas

O ajustamento pelo método das inunções mínimas não é indicado para realizar a integração, porém é muito utilizado em análises de densificação de levantamentos. Nele, selecionadas as estações e as observações que farão parte do ajustamento e atribuídos os valores às tolerâncias para que as observações sejam, ou não, consideradas *outliers*, é necessário que se escolha uma estação cujas coordenadas serão fixadas no ajustamento com inunções mínimas.

As inunções mínimas consideradas são quatro: coordenadas da origem (φ_0, λ_0), que impedem a translação; azimute (A_0), que evita a rotação e, finalmente, a distância (b_0) que impõem a escala. A adoção de tais inunções equivale a amarrar a rede ao sistema de coordenadas adotado.

O objetivo nesta fase de ajustamento é avaliar a qualidade dos vetores e eliminar aqueles que supostamente apresentam erros grosseiros.

Apresenta problemas decorrentes tanto da definição do datum (definição e fixação das coordenadas da estação de controle no processo de densificação, modelagem dos parâmetros e diferença de geometria entre data), quanto da densificação das equações normais, em decorrência do problema de singularidade.

3 Conclusão e considerações finais

Atualmente, em função dos diferentes sistemas de referência existentes tanto nacional quanto internacionalmente, surge à necessidade de compatibilização dos levantamentos realizados, de tal forma que se atenda os níveis internacionais de precisão exigidos, bem como a manutenção de coordenadas estáticas (estações de controle) disponíveis a todos os usuários desta tecnologia.

Este trabalho contemplou o estudo dos diferentes métodos de ajustamento envolvidos nos processos de densificação e integração de redes geodésicas, visando a análise das distorções no ajuste de redes.

Além disso, estudos e testes mais refinados estão sendo realizados em termos de experimentação e implementação destes métodos, envolvendo o processamento de dados coletados pela técnica de posicionamento espacial GPS.

Estatísticas indicadas na literatura recomendam o método das estações ponderadas como o mais indicado ao processo de integração de redes geodésicas e ainda o ajustamento pelo método seqüencial pela eficiência computacional apresentada, enquanto que para análises de densificação, indica-se o ajustamento por inunções mínimas, em função de sua praticidade e por ser amplamente empregado em *software* de processamento de dados GPS.

4 Referências

Antunes, C.: *Método seqüencial de ajustamento no tratamento de observações GPS*. Conferência de Cartografia e Geodésia: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1996.

Camil, G.: *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas*. Curitiba: UFPR, 1994.

Costa, S. M.; Lima, M. A. A.: *Ajustamento da rede planimétrica brasileira em SIRGAS2000*. IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas – IV CBCG. CBCG, Curitiba, 2005.

Monico, J. F.G.: *Ajustamento e análise estatística de observações aplicados na detecção de deformações*. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná. Dissertação (mestrado), Curitiba, 1998.

Monico, J. F.G.: *Integração de redes GPS*. Boletim de Ciências Geodésicas, Curitiba: v.3, p.82-84, 1998.

Mônico, J. F. G.: *Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações*.: UNESP, São Paulo, 2000.

Steeves, R. R.; Penton, C. R.: *Guidelines for the integration of geodetic networks in Canada*. The canadian surveyor, vol.39, no. 3, p. 197-210, 1985.