

A Utilização da Transformada Wavelet e da Transformada de Fourier na Generalização de Modelo Digital do Terreno (MDT)

Clovis Gaboardi
Henrique Firkowski

UFPR – Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas
81531-990 Curitiba PR
gaboardi@ime.eb.br; firk@ufpr.br

Resumo: A transformada de Fourier é uma técnica antiga e bastante conhecida nas aplicações em processamento de sinais, processamento de imagens, modelagem digital do terreno e inúmeras outras aplicações. A transformada Wavelet, por sua vez, apesar de seu desenvolvimento recente, tem sido apresentada como uma sucessora da transformada de Fourier devido às suas grandes possibilidades de aplicação. Neste artigo são apresentados os resultados da generalização de MDT, de formato de grade regular, por meio de aplicações da transformada de Fourier e da transformada Wavelet de Haar. As transformadas foram aplicadas a um conjunto de pontos correspondentes a uma linha de perfil de aproximadamente 19 km e a uma grade regular correspondente a uma área de aproximadamente 19x21 km, ambos abrangendo partes da Planície Litorânea e da Serra do Mar, no estado do Paraná.

Palavras chaves: Modelo Digital do Terreno, Generalização, transformada de Fourier, transformada Wavelet.

Abstract: The Fourier transform is an traditional and well known technique for applications in signal processing, image processing, digital terrain modeling and others. On the other hand, the Wavelet transform, although recent, has been presented as a successor of Fourier transform due its possibility of application. In this paper are presented the results of DTM (Digital Terrain Model) generalization, in regular grid format, by means of Fourier transform and Haar Wavelet transform. The transforms were applied to a profile with approximately 19 km and a DTM with approximately 19x21 km, both enclosing part of the area of Planície Litorânea and Serra do Mar, in the Paraná state.

Keywords: Digital Terrain Model, Generalization, Fourier transform, Wavelet transform

1 Introdução

Modelos Digitais do Terreno requerem grande volume de dados e processamento computacional de alto desempenho, tanto para a análise geográfica como para visualização científica. Embora o desempenho dos sistemas computacionais esteja crescendo vertiginosamente tanto em capacidade de armazenamento quanto em velocidade de processamento, a quantidade e a complexidade dos dados sobre o terreno têm crescido na mesma proporção, em virtude do aumento da variedade de aplicações e do número de sensores e técnicas de aquisição. Por esta razão torna-se necessário, em muitas aplicações, reduzir a quantidade dos dados de um MDT a fim de permitir um melhor desempenho no seu processamento.

A transformada Wavelet tem se mostrado uma ferramenta importante para o trabalho com sinais, imagens e modelos de superfícies em que se necessita o processamento e/ou visualização em diversos níveis de resolução (escala). Embora tenha surgido na forma de utilização atual somente no início da década de

1980, a formulação matemática da transformada Wavelet consolidou-se devido ao trabalho de um grande número de pesquisadores das mais diversas áreas do conhecimento, atraídos pela sua vasta gama de aplicações.

2 Revisão de literatura

2.1 Modelo Digital do Terreno

O MDT é usualmente definido como uma representação numérica das características do terreno (Kraak e Ormeling, 1996) e corresponde a um conjunto de valores numéricos referentes às coordenadas planimétricas (x, y) e altimétricas (z) de amostras pontuais do terreno, a partir das quais se pode inferir a superfície topográfica.

Segundo Jones (1997), embora a maioria dos aplicativos comerciais de Sistema de Informações Geográficas (SIG) disponíveis trate de dados representados em duas dimensões (2D), isso se deve principalmente ao fato de que a criação de cenas realistas envolvendo MDT é computacionalmente dispendiosa, em comparação com as mesmas cenas em 2D. Entretanto, percebe-se um aumento significativo do interesse por aplicações com o uso de dados de MDT, causado tanto pelo aumento da capacidade de processamento dos meios computacionais quanto pela expansão do uso do SIG, que conscientizou os usuários para as possibilidades desta nova tecnologia.

A importância da utilização de MDT em SIG advém da possibilidade de obtenção dos atributos do terreno (declividade, linhas de visada, cálculos de volume, entre outros) de acordo com as necessidades do usuário. Segundo Moore et al. (1993), é mais eficiente incluir uma técnica de análise do terreno em um SIG e calcular os atributos do terreno sempre que isso se tornar necessário do que armazenar todos os atributos do terreno neste SIG.

2.2 Generalização

Num ambiente digital, o processo de generalização suporta uma variedade de tarefas, que incluem: redução dos dados digitais armazenados, manipulação de escala, classificação estatística e simbolização. De todas as tarefas da computação cartográfica e SIG, poucas são tão fundamentais ao processo de confecção do mapa e tão difíceis de automatizar quanto à generalização. Pelo fato do mapa reunir símbolos gráficos que representam a visão de algum aspecto do nosso entendimento do mundo, é necessária uma abstração do conhecimento. A maior restrição ao conteúdo do mapa é a escala, que determina o espaço disponível para os símbolos. Assim, a generalização cartográfica pode ser considerada como um processo de abstração da informação dependente da escala (Jones, 1997).

McMaster e Shea (1992) destacam dois aspectos importantes da generalização: a generalização cartográfica, que envolve os aspectos semânticos da generalização e a generalização estatística, que envolve a simplificação geométrica de linha e polígonos e de Modelos Digitais do Terreno e que afetam a acuracidade da base dados. Ainda segundo McMaster e Shea (1992), grande parte dos esforços desenvolvidos nas últimas décadas foi concentrada na generalização cartográfica, enquanto que só mais recentemente os cartógrafos reconheceram a necessidade de focalizar os aspectos da generalização estatística.

A popularização do uso de SIG nas mais diversas áreas do conhecimento em que se necessita de análises e informações a respeito da superfície topográfica tem feito crescer a demanda por soluções que envolvem a generalização de superfícies. A par do crescimento da demanda, diversos trabalhos têm surgido envolvendo a generalização de Modelos Digitais do Terreno.

2.3 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier tem por finalidade decompor uma função numa combinação linear de componentes sinusoidais (senos e co-senos), com diferentes amplitudes e frequências. O conjunto de funções ortogonais $\{\sin(2k\pi x), \cos(2k\pi x)\}$, k inteiro, forma a base do espaço de funções da transformada de Fourier.

Dada uma função unidimensional $y=f(x)$, a transformada de Fourier é dada por (Eq. 1):

$$\mathfrak{F}(f(x))=F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iux} dx, \quad \text{em que } i=\sqrt{-1} \quad (1)$$

A aplicação da transformada de Fourier proporciona a representação de uma função em termos das suas componentes de frequência. Considerando-se o caso unidimensional de uma linha do terreno, a primeira componente de frequência (harmônica de ordem zero) é o valor da média das altitudes (valor constante, representado graficamente por uma linha horizontal). As demais componentes têm frequências crescentes (comprimentos de ondas decrescentes), iniciando com um ciclo por linha, que representa o harmônico de ordem 1 até atingir $N/2$ ciclos por linha, em que N é o número de pontos da linha.

Para uma função discreta bidimensional ($z=f(x,y)$), como no caso de um MDT representado por uma grade regular, a frequência é definida em termos de ciclos por linha (eixo X) e ciclos por coluna (eixo Y). A transformada de Fourier separa o MDT em componentes de frequência e fornece os coeficientes (medida da importância relativa) de cada uma destas componentes. Aos dados de um MDT expressos em termos de frequências é dito terem sido transformados do domínio do espaço para o domínio da frequência. A transformada de Fourier fornece tanto a frequência de cada componente do MDT como a proporção de informação associada a cada uma destas componentes.

2.4 Transformada Wavelet

A transformada Wavelet de uma função $f(x)$ é dada por (Eq. 2):

$$C(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)W\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \quad (2)$$

Na Equação 2, a é denominado fator de escala e b é denominado fator de translação. A função $W(x)$ é chamada de Wavelet-mãe. As funções $W((x-b)/a)$ são as funções Wavelet derivadas da Wavelet-mãe por translação (Eq. 3) e por mudança de escala (Eq. 4). O valor de $C(a,b)$ representa a similaridade entre a função Wavelet $W((x-b)/a)$ e a função analisada $f(x)$. Quanto maior o valor de $C(a,b)$, maior a similaridade da função analisada com a Wavelet.

$$W_b(x)=W(x-b) \quad (\text{translação}) \quad (3)$$

$$W_a(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}W\left(\frac{x}{a}\right), a \neq 0 \quad (\text{escalonamento}) \quad (4)$$

Nas Figuras 1 e 2 mostra-se uma função Wavelet com alguns exemplos de translação e escalonamento.

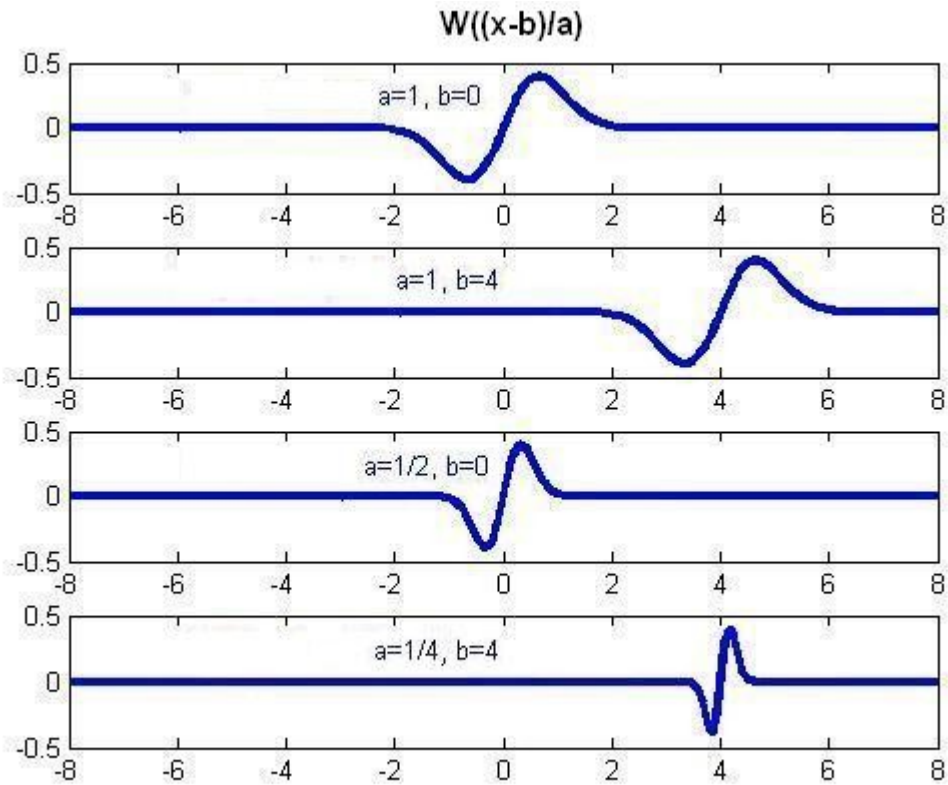


Figura 1: FONTE: Adaptado de Parker (1997), p. 253.

Translação e escalonamento da função Wavelet $W(x) = \sin(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

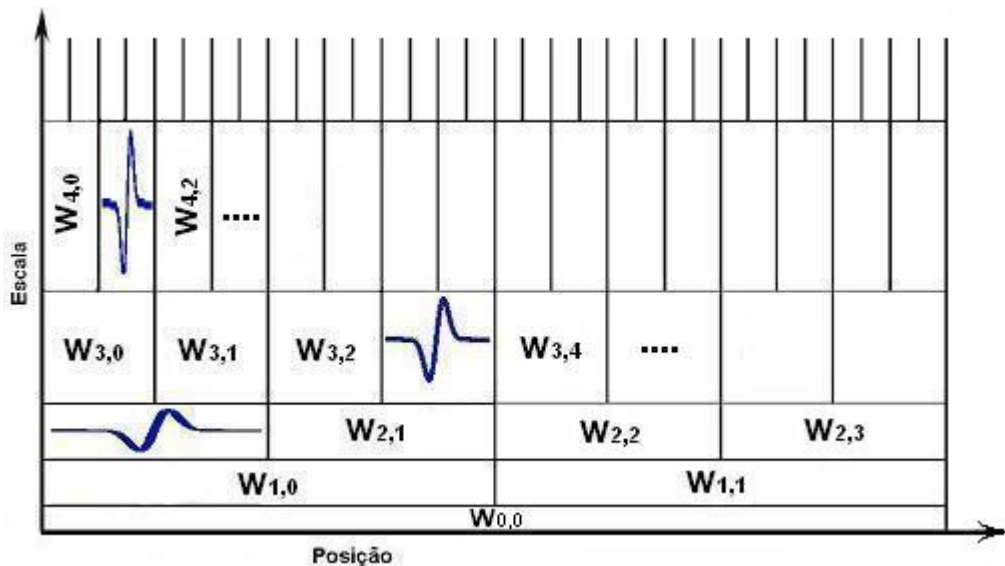


Figura 2: FONTE: Adaptado de Parker (1997) e Burrus et al. (1998).

Translação e escalonamento ($W_{a,b} = W((x-b)/a)$) da função $W(x) = \sin(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$

A base para a transformada de Fourier é formada por um conjunto de funções (seno e co-seno), que possuem valores não nulos em todo o domínio. Portanto, na transformada de Fourier, cada componente contribui para a reconstrução da função de modo global. No caso de um MDT, cada componente de frequência da transformada de Fourier é representativo de toda a superfície analisada. Desta forma, a transformada de Fourier determina “*quais*” frequências ocorrem numa determinada função, mas não determina “*onde*” estas frequências ocorrem.

Na transformada Wavelet utilizam-se funções de rápido decaimento. Esta propriedade faz com que a contribuição de cada elemento da base seja local, o que permite que a análise da função seja realizada tanto em termos de frequência como de posição. Em outras palavras, a transformada Wavelet permite determinar não apenas “*quais*” as componentes de frequência da função, mas também “*onde*” estas frequências ocorrem. Além disso, a base da transformada de Fourier pertence a um espaço finito de funções (senos e co-senos), enquanto que na transformada Wavelet esta base é ilimitada. Assim, é possível projetar funções Wavelet com propriedades adequadas a cada tipo de aplicação.

A Wavelet de Haar, utilizada no presente artigo, é definida por (Eq. 5):

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases} \quad (5)$$

Mais detalhes sobre a teoria das transformada Wavelet podem ser vistos em Meyer (1993), Parker (1997) e Burrus et al. (1998).

3 Experimentos realizados

Os dados do experimento formam uma grade regular com espaçamento de 150 metros produzida por digitalização da carta topográfica Morretes-PR (SG22-X-D-II-3), na escala 1:50.000, editada pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, datada de 1992 (segunda edição) e que representa a região compreendida entre os paralelos 25°30' e 25°15' Sul e entre os meridianos 49°00' e 48°45' Oeste. A extensão da região compreendida pela carta é de aproximadamente 27,5km na direção Norte-Sul e 25,5 km na direção Leste-Oeste. Nesta carta está representada uma parte da Serra do Mar na forma de um alinhamento sudoeste-nordeste que apresenta acentuados desníveis, uma parte de planície litorânea na região sudeste caracterizada por baixas altitudes e uma parte de planalto na região noroeste.

Foram realizados dois experimentos: o primeiro com um conjunto de 128 pontos que representam uma linha de perfil do terreno de aproximadamente 19 km, percorrendo o sentido Leste-Oeste e o segundo com uma grade regular de 160x144 pontos representativos de uma região de aproximadamente 24x21,5 km, compreendendo aproximadamente 75% da área abrangida pela carta topográfica.

Os algoritmos para o experimento foram implementados em linguagem de programação Matlab, versão 5.3.

3.1 Generalização da linha de perfil

Sobre a linha de perfil do terreno, representada por 128 pontos, foi aplicada a transformada de Fourier unidimensional. Em seguida, foram subtraídos 50% dos coeficientes menos significativos da transformada de Fourier. Este número de subtrações deve-se a compatibilizar o nível de generalização com a realizada pela transformada Wavelet de Haar, descrita no próximo parágrafo. A seguir, foi aplicada a transformada de Fourier inversa, gerando-se um novo perfil do terreno (generalizado).

Sobre a mesma linha de perfil foi aplicada a transformada Wavelet de Haar, cujo resultado foi a geração de uma grade generalizada de 64 pontos, com espaçamento de 300 metros. Para possibilitar a comparação ponto a ponto com a grade original, foi aplicada, sobre a linha generalizada, uma operação de interpolação

bilinear. Na Figura 3 mostra-se o gráfico do perfil original juntamente com os gráficos dos perfis generalizados pelas transformadas Wavelet e de Fourier. Na Figura 4 mostra-se um detalhe da Figura 3 correspondente à região mais acidentada.

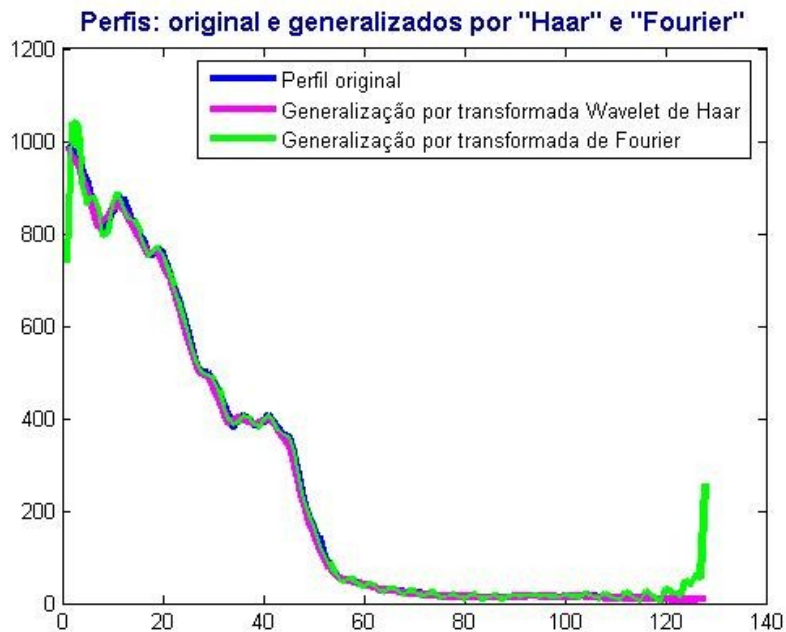


Figura 3: Perfis: original e generalizados por "Haar" e "Fourier".

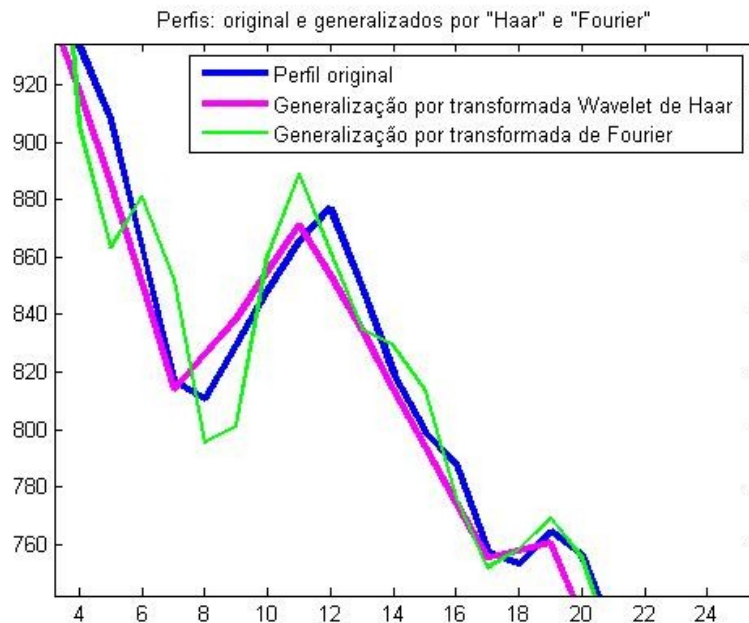


Figura 4: Detalhe dos perfis mostrados na Figura 3.

3.2 Generalização da grade regular

O mesmo procedimento utilizado na generalização da linha de perfil foi utilizado para a generalização da grade. Primeiramente, foi aplicada a transformada de Fourier bidimensional sobre a grade regular. Em seguida, foram subtraídos 75% dos coeficientes menos significativos e realizada a transformação inversa. Novamente o número de coeficientes subtraídos foi escolhido de modo a compatibilizar a redução com a

generalização da grade pela transformada Wavelet de Haar. Na Figura 5 mostra-se o MDT original e na Figura 6 o MDT generalizado pela transformada de Fourier.

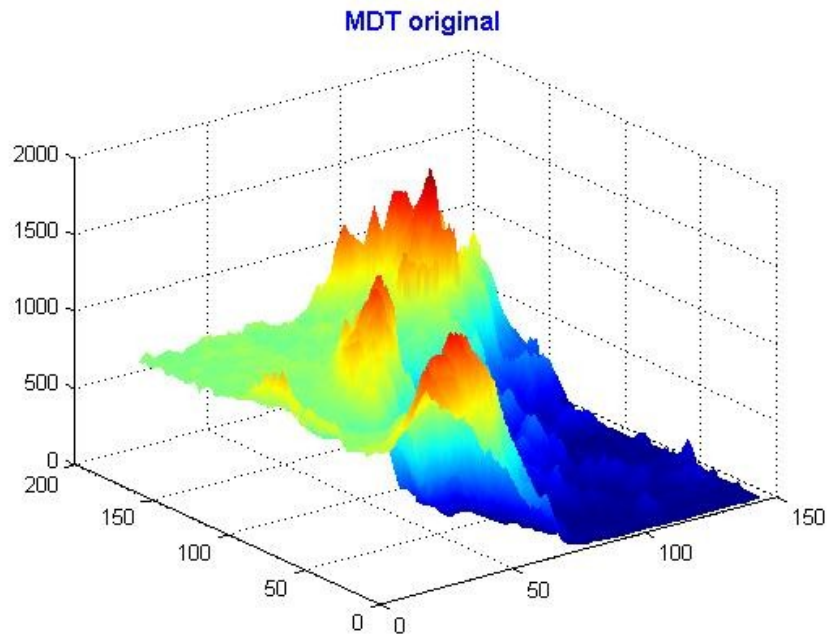


Figura 5: MDT original

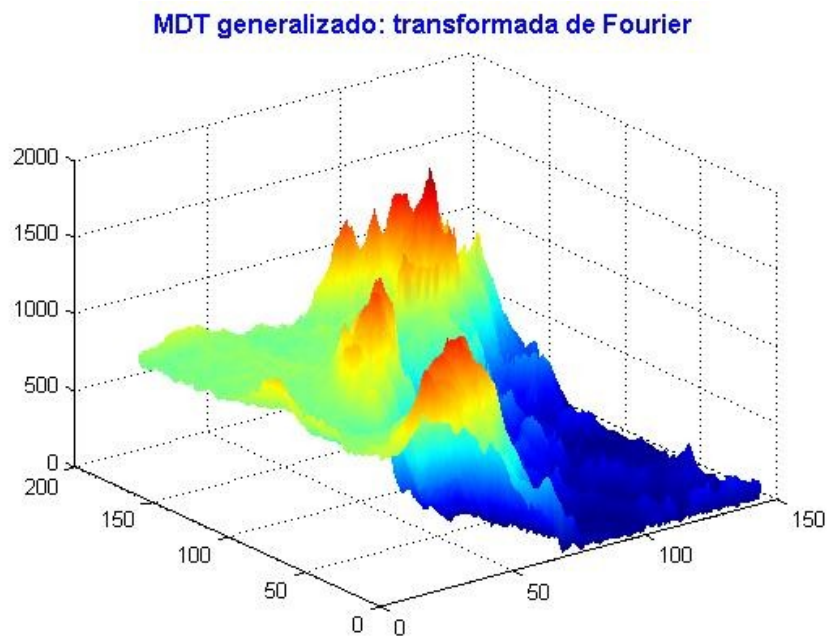


Figura 6: MDT generalizado: transformada de Fourier

No experimento seguinte, a grade foi generalizada pela aplicação da transformada Wavelet de Haar bidimensional. A grade generalizada ficou com um espaçamento de 300 metros entre os pontos, o que totaliza 25% dos pontos da grade original. O MDT generalizado resultante é mostrado na Figura 7.

MDT generalizado: transformada Wavelet de Haar

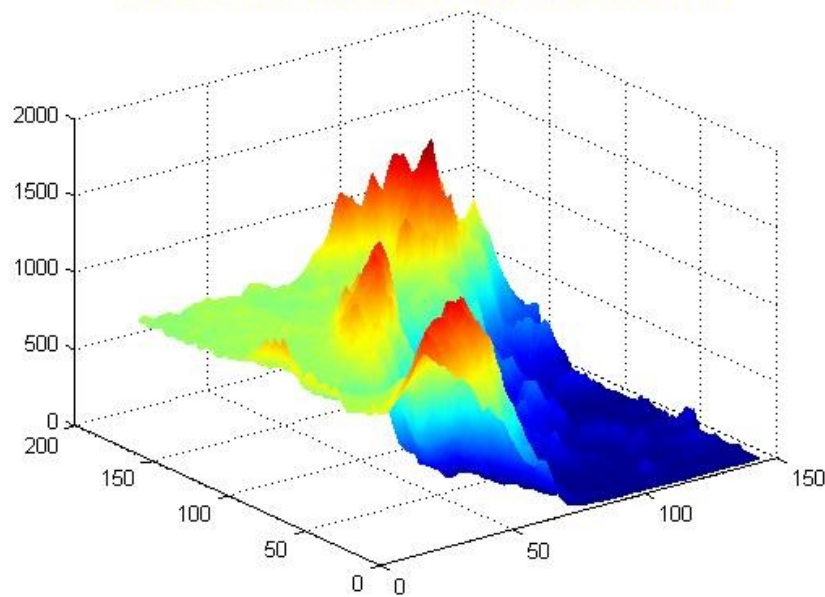


Figura 7: MDT generalizado: transformada Wavelet de Haar

4 Comparação dos resultados

Na Figura 8 mostram-se as diferenças, em valor absoluto, entre as altitudes do perfil original e dos perfis generalizados. Observa-se que a generalização por transformada Wavelet de Haar apresentou melhores resultados (menores diferenças) na região plana (pontos 56 a 128) e resultados piores (maiores diferenças) na região mais acidentada (pontos 1 a 55). Por outro lado, na generalização por transformada de Fourier observou-se um aumento acentuado das diferenças nas bordas do modelo.

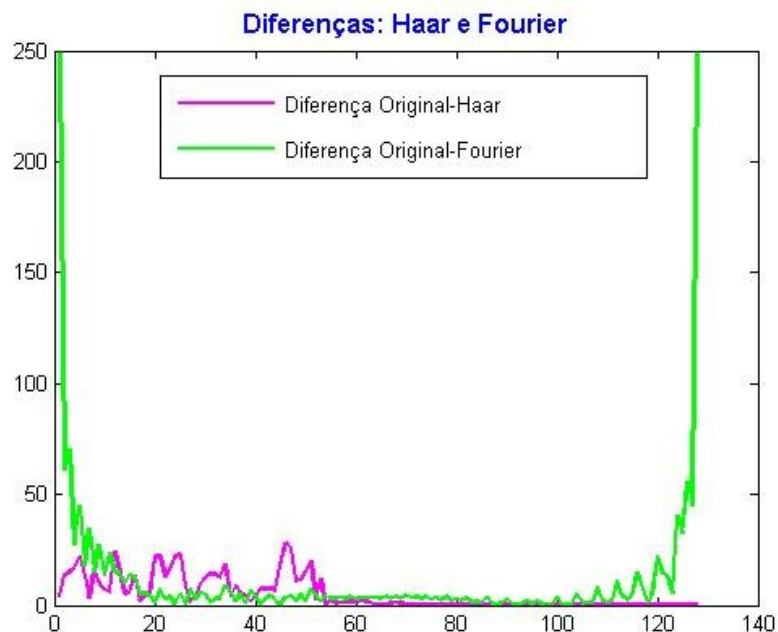


Figura 8: Diferenças de altitude entre o perfil original e os generalizados

Nas Figuras 9 e 10 mostram-se respectivamente as diferenças entre a grade original e as grades generalizadas pela transformada de Fourier e pela transformada Wavelet de Haar. Observa-se novamente,

os erros mais acentuados nas bordas na generalização por transformada de Fourier (Fig. 9), ao passo que na generalização por transformada Wavelet os erros maiores ocorrem nas regiões correspondentes aos terrenos mais acidentados (Fig. 10).

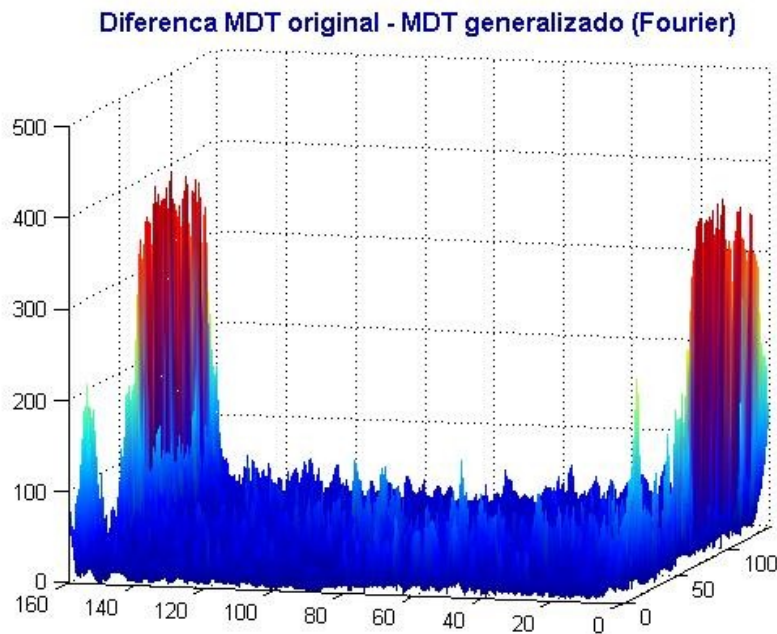


Figura 9: Diferença de altitude entre o MDT original e o generalizado pela transformada de Fourier

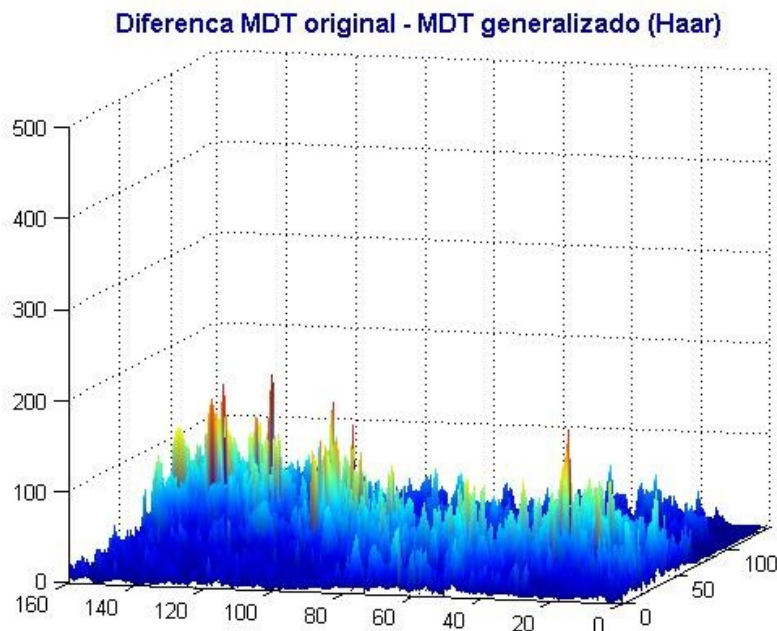


Figura 10: Diferença de altitude entre o MDT original e o generalizado pela transformada Wavelet de Haar

Finalmente, na Tabela 1, mostram-se a média dos erros absolutos e os respectivos desvios-padrão dos resultados obtidos nas generalizações da linha de perfil e da grade. Os testes estatísticos realizados mostram que as diferenças das médias são significativas, ao nível de significância de 5%, tanto para a generalização da linha de perfil quanto para a generalização da grade, com o melhor resultado

apresentado pela generalização por meio da transformada Wavelet. Para o nível de significância de 1%, a diferença das médias é significativa para a generalização da grade, com o melhor resultado apresentado pela generalização por transformada Wavelet. Entretanto, neste nível de significância (1%), a diferença das médias não é significativa para a generalização da linha de perfil.

5 Conclusão

Embora os experimentos realizados ainda sejam preliminares, pode-se dizer que a utilização da transformada Wavelet para a generalização de MDT é promissora. Entretanto, esta utilização demanda um estudo mais aprofundado, com o objetivo de determinar as funções Wavelet que melhor se adaptem aos Modelos Digitais do Terreno.

Também não foram consideradas, nas generalizações realizadas neste trabalho, as restrições impostas pela geomorfologia (linhas de crista, cursos d'água), de modo a preservar a consistência geomorfológica do MDT generalizado. Estes procedimentos são importantes e serão considerados em trabalhos futuros.

6 Referências Bibliográficas

Burrus, C. S., Gopinath, R. A., Guo, H. *Introduction to wavelets and wavelets transforms: a primer*. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 268 p.

Jones, C.B. *Geographical Information Systems and Computer Cartography*. Harlow: Longman, 1997. 319 p.

Kraak, M. J., Ormeling, F. J. *Cartography: visualization of spatial data*. Essex: Longman, 1996. 222 p.

McMaster, R. B., Shea, K. S. *Generalization in Digital Cartography*. Washington: Association of American Geographers, 1992. 134 p.

Meyer, Y. *Wavelets: algorithms and applications*. Philadelphia: SIAM, 1993. 133 p.

Moore, I. D., Turner, A. K., Wilson, J. P., Jenson, S. K., Band, L. E. *GIS and Land-surface-subsurface Process Modelling*. In: **Goodchild, M.F., Parks, B. O., Steyart, L. T.** *Environmental modelling with GIS*. New York: Oxford University Press, 1993. Cap 19.

Parker, J. R. *Algorithms for image processing and computer vision*. New York: John Wiley & Sons, 1997. 417 p.