

Predição e Interpolação de Pontos em uma Superfície Utilizando-se Redes Neurais MLP

Prof. Dr. Tule César Barcelos Maia¹
Prof. Dr. Paulo César Lima Segantine²
Prof. Dra. Roseli Aparecida Francelin Romero³

¹ UCG – Departamento de Engenharia
74000-000 Goiânia GO

tule@ucg.br

² USP – STT - SC

13560-970 São Carlos SP

seganta@sc.usp.br

³ USP – ICMC - SC

13560-970 São Carlos SP

rafrance@icmc.sc.usp.br

Resumo: A interpolação e a predição de pontos em uma superfície têm importância nas áreas da Engenharia na determinação de pontos que possam ser utilizados no planejamento e em obras que necessitem de dados em posições diferentes daquelas da superfície inicialmente levantada ou disponível. Pensando em uma técnica ou ferramenta alternativa às empregadas atualmente, tais como krigeagem, vizinho mais próximo, polinômios e outros, aplicou-se neste trabalho o modelo de Redes Neurais Artificiais (RNA) MultiLayer Perceptron (MLP) na predição e interpolação de pontos em uma superfície. Foram usadas superfícies planas e onduladas para a verificação dos resultados junto a pontos conhecidos e com outras técnicas de obtenção dos pontos, onde não se conhecia o valor. Os resultados mostraram as RNA's como uma técnica alternativa na predição e interpolação dos pontos desejados.

Palavras-Chaves: Planejamento, RNA, MLP, Predição, Interpolação, Superfície.

Abstract: The prediction and interpolation of points in a surface have an importance in the areas of Engineering in the points determination which can be used in the planning and building that need data in different positions of the initial surveyed surface. This work has applied a model of Artificial Neural Network (RNA) MultiLayer Perceptron (MLP) in the prediction and interpolation of point in surfaces as an alternative to those techniques and tools most currently employed, such as kriging, neighborhood, polynomials. Flat and undulating surfaces have been used to verify the results in the determined points and with others techniques to obtain points where place do not know this value. The results showed RNA's as an alternative technique to point prediction and interpolation.

Keywords: Planning, RNA, MLP, Prediction, Interpolation, Surface.

1. INTRODUÇÃO

Na maior parte das aplicações da Engenharia precisamos de pontos nas três dimensões para o desenvolvimento dos trabalhos. Entretanto, dificilmente encontramos os dados necessários em uma posição desejada, forçando, assim, a obtenção dos mesmos por alguma técnica de interpolação ou de predição do valor. Desta forma, este trabalho propõe o uso de Redes Neurais Artificiais (RNA) na obtenção de valores diferentes daqueles conhecidos inicialmente, através da generalização por parte do modelo Multilayer Perceptron (MLP) de uma superfície apresentada por pontos discretos.

Várias aplicações de RNA's foram realizadas nas áreas de Engenharia. Great e Kingle (1998) aplicou modelos de RNA's na interpretação da gravidade; Kuhar (2001) os utilizou na aproximação de um modelo geoidal; Maia (2002) aplicou um modelo de rede MLP temporal na correção de ciclos da portadora GPS; Silva (2003) usou um método para modelar dados GPS na obtenção das observáveis da portadora L2 e da pseudodistância do código P2, a partir de redes neurais; Maia (2004) aplicou modelos na determinação de modelos geoidais globais.

Para a determinação de pontos em uma superfície, inicialmente foram utilizados dados de gravidade e de modelos do Geopotencial e Regionais disponíveis para avaliação dos modelos de RNA do tipo MLP. O motivo do uso destes modelos foi a quantidade de dados disponíveis em grandes áreas, com dados de entrada de superfícies planas e onduladas. Pretende-se no futuro aplicá-los em superfícies locais com áreas menores, contemplando-se também áreas planas, onduladas e montanhosas.

As redes MLP possuem uma camada de entrada, pelo menos uma camada intermediária e uma camada de saída. A quantidade de neurônios em cada camada depende do problema a ser resolvido. As camadas são interligadas por conexões entre seus neurônios. Isto significa dizer que um neurônio de uma camada é conectado a todos da outra camada quando a rede é completamente conectada. A Figura 1 a seguir mostra um exemplo de uma rede MLP. Maiores detalhes podem ser vistos em Haykin (1999) e Braga (2000).

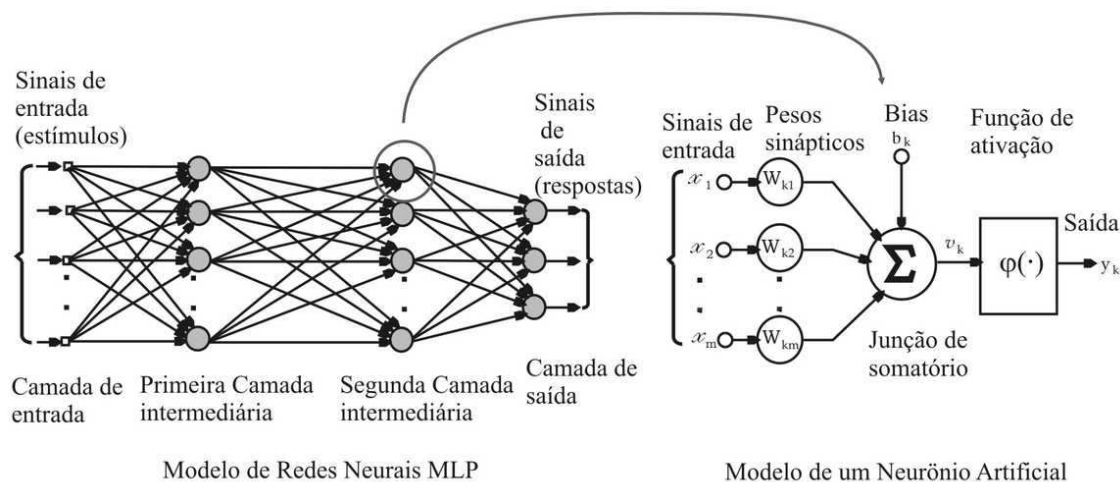


Figura 1 : Arquitetura de uma rede MLP com 2 camadas intermediárias.

A estrutura de um neurônio artificial proposta por McCulloch-Pits, em 1943, que integra cada camada, identifica seus três principais elementos básicos, necessários para o entendimento do algoritmo *backpropagation* apresentado em Rumelhart and MacClelland (1986). Os elementos são:

- As conexões que são caracterizadas pelos pesos sinápticos entre os neurônios;
- Uma função soma para adicionar os sinais de entrada multiplicados pelos pesos sinápticos;
- Uma função de ativação para limitar a amplitude do sinal de saída do neurônio.

É aplicado ao neurônio um estímulo externo (*bias*), para aumentar ou diminuir a entrada da função de ativação, dependendo se o sinal é negativo ou positivo, conforme Figura 1.

O sinal em uma MLP é propagado no sentido da camada de entrada para a camada de saída, “*forward*” (da esquerda para a direita na Figura 1), passando por todas as camadas. Neste sentido há a propagação

dos sinais das funções de ativação, ficando os pesos inalterados. Na direção “backward” o sinal de erro é propagado no sentido da camada de saída para a camada de entrada (da direita para a esquerda na Figura 1), passando por todas as camadas. Os pesos das conexões são atualizados na direção oposta ao gradiente do erro calculado entre a saída fornecida pela rede e a saída desejada.

O ajuste dos pesos sinápticos da rede na camada l de acordo com a regra delta e o termo momento é conforme a expressão (1) (Haykin, 1999):

$$w_{ji}^{(l)}(n+1) = w_{ji}^{(l)}(n) + \alpha [w_{ji}^{(l)}(n) - w_{ji}^{(l)}(n-1)] + \eta \delta_j^{(l)}(n) y_i^{(l-1)}(n) \quad (1)$$

$$\delta_j^{(l)}(n) = \begin{cases} e_j^{(L)}(n) \varphi'_j(v_j^{(L)}(n)) & \text{neurônio } j \text{ na camada de saída } L \\ \varphi'_j(v_j^{(l)}(n)) \sum_{k=0}^m \delta_k^{(l+1)}(n) w_{kj}^{(l+1)}(n) & \text{neurônio } j \text{ na camada intermediária } l \end{cases} \quad (2)$$

$$e_j(n) = d_j(n) - o_j(n) \quad \text{se o neurônio } j \text{ está na camada de saída} \quad (3)$$

$$v_j^{(l)}(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}^l(n) y_i^{(l-1)}(n) \quad (4)$$

sendo:

- α Termo momento;
- η Taxa de aprendizado;
- e Erro dado pela saída desejada e saída dada pela rede;
- n Época da apresentação do padrão;
- d Saída desejada;
- o Saída dada pela rede;
- j Índice do neurônio da camada de ativação;
- i Índice dos neurônios da camada anterior à camada de ativação;
- l Índice da camada;
- y Sinal de saída do neurônio;
- φ Função de ativação;
- v Sinal de entrada no neurônio j ;
- w Os pesos sinápticos das ligações entre outros neurônios da camada anterior e o neurônio j .

A taxa de aprendizado reflete a velocidade com que a rede aprende sobre os padrões apresentados. Geralmente são utilizadas taxas baixas ($0 < \eta < 1$ e $0 < \alpha < 1$) para o aprendizado, de modo a evitar gradientes altos, ocasionando, por sua vez, altas correções nos pesos sinápticos, o que pode dar instabilidade à rede, não convergindo esta para um valor satisfatório. O termo momento é utilizado para dar estabilidade à rede.

2. SUPERFÍCIES UTILIZADAS

Neste trabalho foram usadas superfícies a partir do arquivo criado pela SCGGSA (Sub-Comissão de Gravimetria e Geóide da América do Sul) e, neste caso, foram gerados os padrões de treinamento, validação e teste de acordo com a metodologia citada anteriormente. A grade utilizada foi de 10x10 minutos em uma área de 10°x10° de arco. A Figura 2 mostra a disposição dos dados utilizados para treinamento. As quadrículas não marcadas não possuem valores medidos, apenas valores obtidos pela média dos valores dos pontos vizinhos.

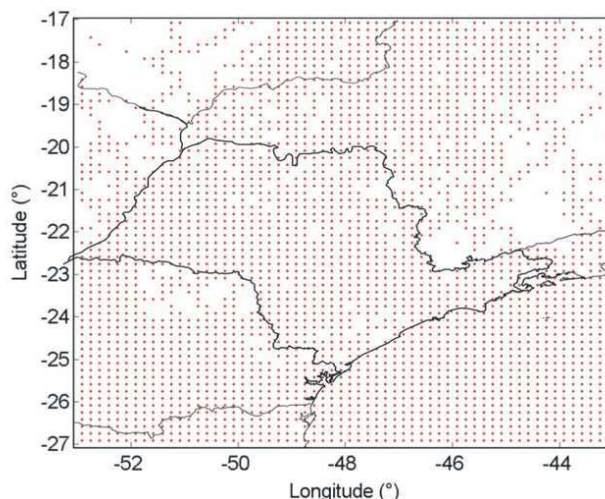


Figura 2 : Grade de dados de pontos com valores de anomalia da gravidade.

Outra superfície utilizada foi a superfície gerada pelo modelo do geopotencial EGM96, que possui coeficientes de grau e ordem 360, com 130.317 coeficientes (NIMA, janeiro de 2000). Entretanto, foram usadas várias superfícies geradas pela variação do grau e ordem deste modelo. Foram utilizadas grades de 10x10 minutos na mesma área dos dados de anomalias. Também foi usada a superfície do SPGEIOD2002 (Silva, 2002) com as mesmas características das anteriores. Os dados das superfícies mencionadas foram normalizados no intervalo de -1 e +1 para entrada do modelo de RNA.

3. RESULTADOS

Inicialmente foram consideradas como entradas para a RNA as latitudes e longitudes, e como saída a anomalia da gravidade. Após tentativas de estabelecer a configuração do modelo de rede neural para se obter uma aproximação à superfície sem a obtenção de um resultado esperado, optou-se por adotar uma camada de saída constituída por 20 neurônios. Estabeleceu-se a estratégia de dividir a anomalia da gravidade em 20 partes iguais, após várias outras tentativas com diversas estratégias.

Neste caso, foi utilizada variação na taxa de aprendizado e no termo momento. Iniciou-se com uma taxa de aprendizado e termo momento iguais a 0,1, terminando com um valor em torno de 0,05. Com esta estratégia a rede ficou mais estável no aprendizado e também baixou o erro médio quadrático no treinamento. Os resultados estão citados na Tabela 1.

Tabela 1 - Resultados do treinamento dos modelos de rede neural para a predição das anomalias para as quadrículas vazias

Rede	Intermediária			Saída	Erro Padrão	Erro Médio	Erro Max	Erro Min	Diferença
Entrada	1 ^a	2 ^a	3 ^a		mGal	mGal	mGal	mGal	mGal
2	88	40	-	20	±0,5	0,4	2,3	-2,0	4,3
2	90	50	-	20	±0,2	0,2	0,5	-1,0	1,5
2	90	55	-	20	±0,2	0,2	1,0	-0,8	1,8
2	88	70	50	20	±1,2	0,9	9,8	-7,2	17,0

Primeiramente testou-se o modelo de redes neurais com 3 camadas intermediárias em um conjunto de dados com 60% dos valores do arquivo de dados existente. Os 40% restantes foram selecionados para teste e validação. No entanto, por um descuido, os dados de validação e testes foram aqueles relacionados à falta de valores para a correção de Bourguer. O aprendizado ocorreu como mostrado na Tabela 1, e a predição das anomalias para as quadrículas nas quais a correção de Bourguer é vazia, como demonstrado na Tabela 2.

A partir dos resultados deste modelo foi elaborado um novo conjunto de treinamento para o modelo de rede neural com dados das quadrículas com valores existentes (aproximadamente 80% do conjunto todo). O conjunto de validação e teste foi composto pelas demais quadrículas com valores dados pela média dos valores vizinhos, segundo orientações de Silva (2002).

Os resultados do treinamento são mostrados na Tabela 1 para os modelos de redes neurais testados com os melhores resultados. A predição é mostrada na Tabela 2 para os respectivos modelos de redes neurais testados. A amplitude das anomalias da gravidade é de 159 mGal, com valores extremos de +83 mGal e -76 mGal. É uma superfície com regiões bastante onduladas, conforme mostrado na Figura 3.

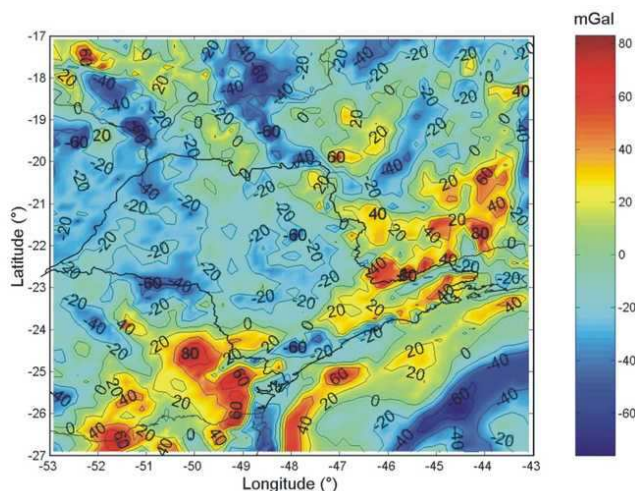


Figura 3 : Superfície dada pelo arquivo das anomalias existentes.

Inicialmente foi testado o modelo de redes neurais com 3 camadas, porém o treinamento do modelo mostrou-se muito instável, mesmo com a divisão da saída em 20 partes iguais, ou seja, 20 neurônios na saída. Assim, foram consideradas novas configurações de modelos de redes para a solução do problema (Tabela 2).

Utilizou-se o programa Matlab para a interpolação da superfície gerada pelos pontos usados no treinamento do modelo de rede neural, comparando-se tal superfície com os resultados obtidos na predição ou interpolação dos valores gerados pelas demais técnicas apresentadas.

O método usado na interpolação foi o "v4 MATLAB 4 griddata method" descrito no programa Matlab. Este método gera superfícies mais suaves, portanto, mais adequado à interpolação, pois serão comparados com os valores médios, dados pelas quadrículas vizinhas, dos pontos de quadrículas anteriormente vazias. O erro padrão na interpolação com este algoritmo ficou em torno de 3×10^{-5} , com erros extremos de 2×10^{-4} e -2×10^{-4} mGal.

Tabela 2: Resultado da predição das anomalias da gravidade dos modelos de redes neurais testados após treinamento e Matlab.

Rede entrada	Intermediária			saída	Erro Padrão mGal	Erro Médio Abs mGal	Erro Max mGal	Erro Min mGal	Diferença mGal
	1 ^a	2 ^a	3 ^a						
2	88	40	-	20	20	15	65	-83	148
2	90	50	-	20	23	17	61	-87	148
2	90	55	-	20	19	14	77	-69	146
2	88	70	50	20	30	23	115	-68	183
v4 Matlab					8	5	43	-33	76

Os erros nas saídas de cada neurônio na camada de saída que representa 1/20 do resultado são praticamente iguais. Foram analisados os arquivos de saída gerados pelo modelo de rede neural. Este resultado é um indicio de estabilidade para o aprendizado deste modelo.

Analisando os resultados na Tabela 2, notam-se erros altos em relação aos dados gerados pela média dos valores das quadrículas vizinhas (Figura 3) para o modelo de RNA com configuração 2x90x55x20. O melhor resultado deste modelo foi no primeiro momento de interrupção do treinamento (momento anterior ao mostrado na Tabela 1) (Figura 4a), onde apresentou um erro quadrático médio da ordem de 0,4 mGal, erro padrão igual a $\pm 0,5$ mGal, erro absoluto de 0,4 mGal e erros extremos da ordem de +2,8 e -2,3 mGal. O resultado deste modelo é mostrado na Figura 4 juntamente com os demais modelos de RNA testados.

Na Figura 4a, primeira interrupção do modelo de RNA com configuração 2x90x55x20, verifica-se que os maiores erros estão nas regiões próximas da borda da grade de dados. Na região central os valores de predição são mais próximos do valor médio dos vizinhos, porém ocorrem alguns pontos de erros também altos. Este modelo de RNA tem um resultado de erro mais homogêneo para toda a área contendo poucos pontos com erros extremos. Entretanto, foram detectados erros da ordem de -60 mGal na parte central da área.

Os resultados foram ruins, como pode ser visto na Figura 4, devido ao fato da maior parte dos pontos de predição estar agrupada em regiões, encontrando-se próxima à borda, portanto, com poucas características para representar a superfície nestes locais. Os resultados apresentados pelo modelo de rede neural também se mostraram piores em relação aos valores médios produzidos pela interpolação realizada com o programa Matlab (Tabela 2), comparados com valores médios das quadrículas vizinhas.

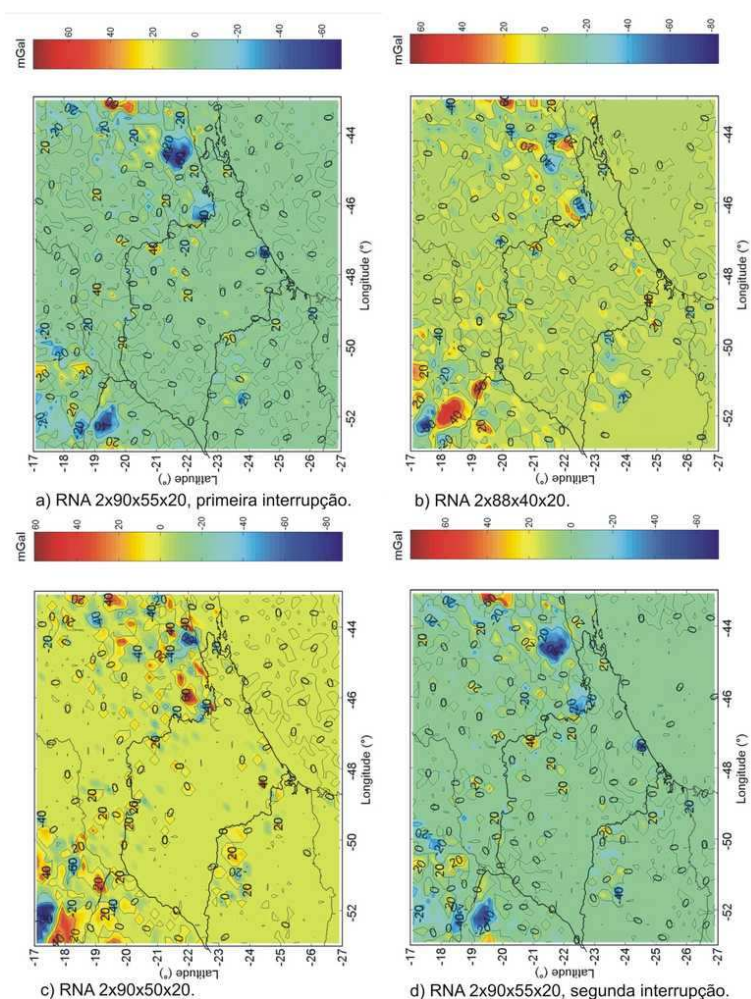


Figura 4 : Diferenças entre as superfícies da Figura 3 e superfícies dadas pela interpolação dos modelos de RNA.

Observando os resultados dos diferentes modelos de redes neurais, nota-se que alguns se aproximam de uma solução de superfície mais suave, portanto mais próximos dos valores médios gerados pelos vizinhos. Em outros casos, vê-se uma superfície mais ondulada em relação aos valores médios. Este fato pode ser notado nas Figuras 4b, 4c e 4d. É importante salientar que em todos os modelos apresentados o treinamento foi interrompido em um valor de erro médio quadrático próximo de 0,05 mGal, e não no máximo do aprendizado do modelo de rede neural.

Observando-se mais detalhadamente as Figuras 4b, 4c e 4d, nota-se que alguns modelos têm melhor desempenho na parte central, como é o caso da RNA com configuração 2x88x45x20, porém não repete o mesmo desempenho nas bordas da área de teste. O modelo de RNA 2x90x55x20 mostrado na Figura 4d,

treinado com mais épocas até alcançar um erro médio quadrático da ordem de 0,01 mGal, manteve os melhores resultados na parte central e na borda do lado inferior da área, contudo não apresentou melhora significativa nos resultados. Nos outros modelos ocorreu o mesmo fato, tendo sido a discrepância nos resultados pequena. Entretanto, o fato foi mostrado apenas para a configuração de 2x90x55x20, conforme a Figura 4.

Cada modelo apresentado obteve uma melhor aproximação à superfície considerada em determinadas regiões. Não houve um modelo de RNA que foi melhor em todas as partes da área de teste, entretanto, mais testes devem ser realizados na procura do modelo que melhor se adapte a esta superfície, bem como o melhor momento para interromper o aprendizado do modelo de RNA.

Além da comparação entre os modelos de RNA do tipo MLP, também foi realizada a comparação com o algoritmo de interpolação do programa Matlab. Entretanto, a comparação não foi feita em toda a área, pois o algoritmo usado pelo Matlab apresentou falhas na geração da malha, com pontos equidistantes nas regiões das bordas, onde há uma quantidade pequena de pontos com valores de anomalias. Este fato pode ser observado na Figura 5.

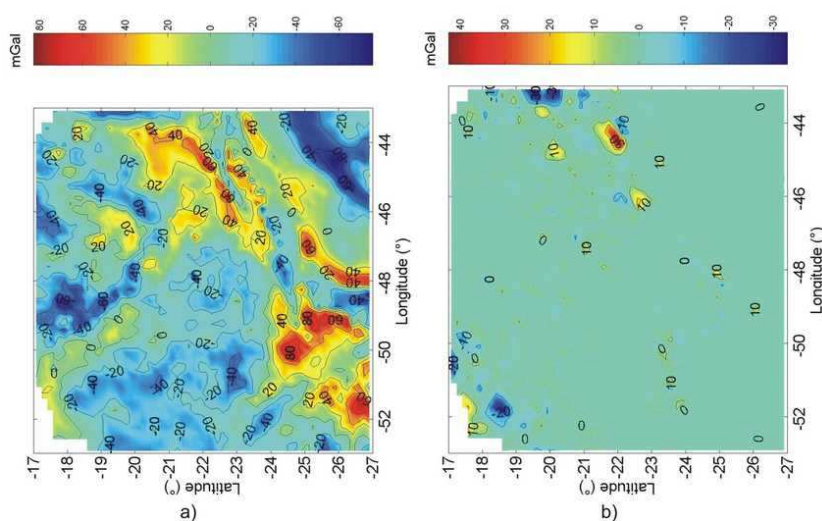


Figura 5 : Superfície gerada pela interpolação usando Matlab e diferença comparada com a superfície da Figura 3.

O resultado da interpolação pelo Matlab e os demais resultados podem ser observados nas Tabelas 1 e 2, tendo o primeiro sido melhor se comparado com os valores médios das quadrículas vizinhas. Este resultado melhor também foi devido à exclusão dos pontos onde não foi possível a interpolação, e é nesta região que geralmente são encontrados erros significativos. Se for comparado com os resultados dos modelos de rede neural, pode-se notar que estes pontos estão entre os piores resultados da predição para determinadas configurações.

Entretanto, não se pode afirmar que os resultados obtidos pelo programa Matlab são melhores, pois devem ser comparados com os dados reais (desconhecidos). Para tal, deve-se levantar os dados dos pontos e comparar com os modelos gerados por redes neurais e Matlab. O algoritmo usado no programa Matlab para interpolação gera superfícies mais suaves, portanto, adequado à área de teste.

Para o modelo do geopotencial EGM96 (Lemoine *et al*, 1998) foi usada a mesma área de influência determinada na Figura 2. Foram geradas várias superfícies do modelo do Geopotencial para o treinamento da rede MLP, com conjunto de dados de 10x10 minutos para treinamento e, para teste e validação, uma grade de 1x1 minuto. A configuração da rede MLP apresentada tem uma configuração com 2 entradas e 2 camadas intermediárias, com 55 e 97 neurônios respectivamente, e uma camada de saída com 1 neurônio.

A superfície gerada pelo modelo do geopotencial, grau (n) e ordem (m) igual a 360 com 360.000 pontos, é apresentada na Figura 6a, enquanto que a representação do modelo gerado pela RNA do tipo MLP com dados do EGM96, anteriormente descrito, não foi apresentado pelo fato das diferenças não serem perceptíveis nesta escala. Entretanto, a Figura 6b apresenta a diferença entre as superfícies das Figuras

6a e a superfície gerada pelo resultado do modelo de RNA.

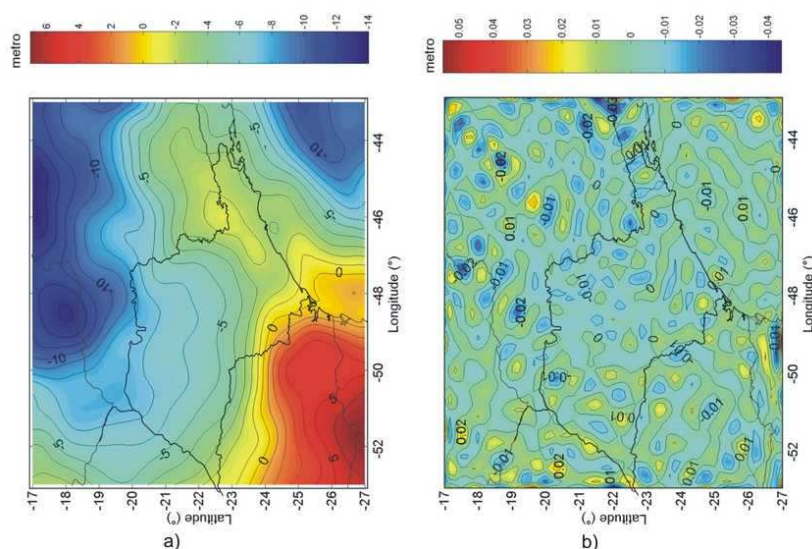


Figura 6 : Superfície gerada pelo EGM96 ($n = m = 360$) com 360.000 pontos e o resultado da diferença desta comparando com a superfície gerada pela RNA do tipo MLP (treinada com 14.500 pontos).

Foi apresentada apenas a superfície de maior discrepância obtida pelo modelo de RNA do tipo MLP em relação à superfície do EGM96. As demais superfícies geradas pelo grau e ordem menores são mais suaves e, portanto, a rede conseguiu uma melhor generalização com erros da ordem de 10^{-3} metros, ou seja, em torno de milímetros. Mesmo assim o resultado apresentado é muito bom.

Para o modelo do SPGEOID2002 foi usada a mesma estratégia adotada na determinação das anomalias da gravidade, ou seja, um modelo de RNA com 20 saídas para representar a resposta (cada saída representa 1/20 da resposta). A superfície gerada por Silva (2002) e a diferença entre esta e o modelo de RNA com configuração $2 \times 40 \times 35 \times 27 \times 20$ é mostrada na Figura 7. Outros testes foram realizados, entretanto apresentou-se o de melhor resultado.

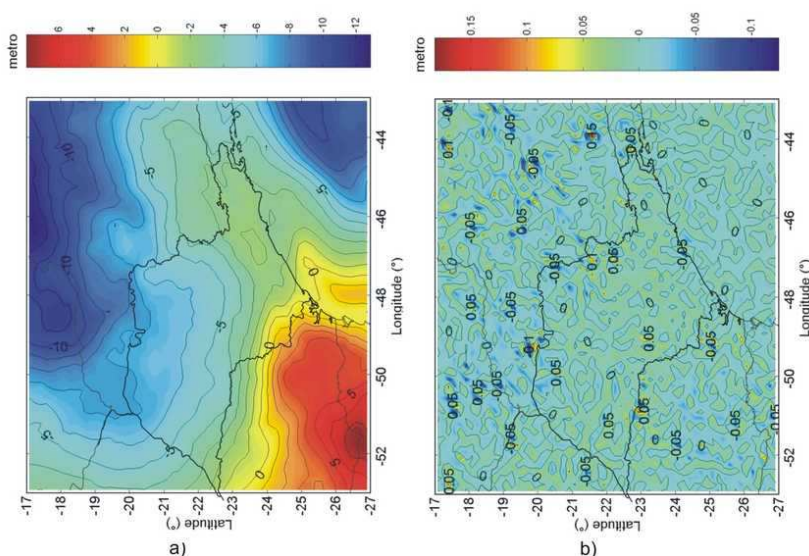


Figura 7 : Superfície obtida por Silva (2002) (SPGEOID2002) e a diferença desta comparando-se com o resultado obtido pela RNA ($2 \times 40 \times 35 \times 27 \times 20$).

4. CONCLUSÕES

Os resultados para a determinação de pontos em uma superfície, usando redes neurais artificiais do tipo MLP e o algoritmo *backpropagation*, se mostraram satisfatórios. O modelo de RNA sem informações do grau da função conseguiu abstrair suas características de forma a representá-la com uma variação da ordem de 10^{-3} para os modelos mais suaves e 10^{-1} para as funções mais ruidosas.

A rede do tipo MLP mostrou-se como uma ferramenta alternativa na interpolação de superfícies não lineares, porém, caso se deseje uma alta precisão, o tempo de treinamento seria elevado para grandes superfícies. A partir do resultado obtido na interpolação das superfícies de testes (dados de gravidade e o modelo do Geopotencial e SPGEOD2002), através da rede neural do tipo MLP, pode-se fazer aplicação da mesma em superfícies onde não são conhecidos os parâmetros que as definem e, por meio dos parâmetros livres da rede neural, pode-se obter aproximações a esta função.

A concepção da arquitetura do modelo de rede neural artificial foi realizada empiricamente. Portanto, foi gasto um tempo considerável na procura daquela que melhor se adaptasse à superfície. Porém, não se tem certeza se é a melhor configuração para o modelo de rede na aproximação à função, apenas pode-se garantir que gera valores em uma determinada precisão.

Em testes, subdividindo a área e gerando superfícies mais homogêneas, foram encontradas mais de uma configuração de rede neural para uma boa representação das subáreas. Entretanto, para toda a área a quantidade de configurações reduziu-se a poucas dentro de uma determinada precisão (próxima de 1 cm). Entre elas existem aquelas que desenvolvem superfícies mais suaves e outras que desenvolvem superfícies um pouco mais onduladas. Isso é importante no momento da escolha do modelo a aplicar. Certamente, esta é uma etapa em que devem ser realizados mais estudos para identificar os tipos de superfícies geradas associados aos modelos de redes neurais com suas respectivas arquiteturas.

Nos testes aplicados junto a superfícies com dados uniformemente distribuídos, para treinamento do modelo de RNA do tipo MLP, o resultado da predição e interpolação foram melhores do que aqueles onde os dados estavam mais concentrados em áreas com grandes espaços vazios em uma superfície.

O uso de taxas de aprendizado e do termo momento mais baixos tornaram as redes neurais mais estáveis, portanto, como esperado, gerou melhores resultados na generalização. Em alguns casos, fez-se necessária a variação da taxa de aprendizado e do termo momento, partindo de valores em torno de 0,1 e diminuindo até um valor em torno de 0,05.

Testes devem ser realizados em pequenas áreas usando as técnicas convencionais e modelos de RNA para aproximação de uma superfície a fim de verificar o seu desempenho na geração de um modelo digital dessa superfície.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Braga, A. P., Carvalho, A. P. L. F., Ludermir, T. B.: *Redes Neurais Artificiais: Teoria e Aplicações*. Editora LTC, 2000.
- Coeficientes para cálculo das anomalias utilizando o modelo EGM96 http://cddisa.gsfc.nasa.gov/pub/egm96/gravity_data/egm96s.to040.rti.f041t360.jpg95e.
- Gret, A.; Klingele, E.: *Application of Artificial Neural Networks for Gravity Interpretation in Two Dimensions*. IGP report Nr. 279, 1998.
- Haykin, S.: *Neural networks – A comprehensive foundation*, segunda edição, Prentice Hall, 1999.
- Kuhar, M.; Stopar, B.; Turk, G.; Ambrozic, T.: *The use of artificial neural network in geoid surface approximation*, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Vol. 108, nº 1, 2001.
- Lemoine F. G. et al.: *The Development of the Joint NASA, GSFC and the National Imagery and Mapping Agency of the Geopotential Model EGM96*. USA. NASA, Technical Report 206861, 1998.
- Maia, T. C. B.; Silva, C. A. U.; Romero, R. A. F.; Leandro, R. F.; Segantine P. C. L.: *Predição da contagem de ciclos da portadora GPS utilizando uma modelagem conexionista temporal – FIR MLP*; XVI Brazilian Symposium on Neural Networks SBRN'02, Porto de Galinhas/Recife – BR, 11 – 14 de novembro, pag 99, 2002.

- Maia, T. C. B.; Romero, R. A. F; Segantine P. C. L.:** *Obtenção de Modelos Geoidais Através do Uso de Redes Neurais Artificiais*; XVII Brazilian Symposium on Neural Networks SBRN'04, São Luiz/MA – BR, 2004.
- Rumelhart, D. E.; MacClelland, J. L.:** *Parallel distributed processing: explorations in the microstructure of cognition*. vol 1, Cambridge, MA: MIT Press, 1986.
- Silva, M. A.:** *Obtenção de um modelo geoidal para o Estado de São Paulo*, Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Transportes. 88p, 2002.
- Silva, C. A. U.:** Um método para estimar observáveis GPS usando redes neurais artificiais, Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Transportes. 113p, 2003.