

REDUÇÃO DE ÁREAS UTM AO ELIPSÓIDE

LEONARDO CASTRO DE OLIVEIRA  
LUIZ FELIPE FERREIRA

Instituto Militar de Engenharia - DE/6  
Praça General Tibúrcio, 80  
22290-270 - Praia Vermelha - Rio de Janeiro  
E-Mail: S6PGRAD @ IMERJ

JORGE PIMENTEL CINTRA

Escola Politécnica da USP - PTR  
Cidade Universitária - Caixa Postal 61.548  
05508-000 - São Paulo

**Resumo.** O sistema de coordenadas UTM, devido a sua grande difusão mundial, é empregado para as mais diversas finalidades. A avaliação de áreas é um bom exemplo que pode caracterizar adequadamente este fato. O trabalho tem por objetivo principal evidenciar as distorções que ocorrem na cálculo de áreas, bem como explicitar uma metodologia adequada ao seu emprego. Foram efetuados vários testes para validar a metodologia.

**Abstract.** The UTM coordinate system is world widely used under many applications. A good example of this is the valuation of areas. The main objective of this paper is to evidence the distortions which occur in calculus of areas as well as to express the right use of it. Some tests were carried out to validate the methodology.

## 01. INTRODUÇÃO

A área de uma superfície é uma grandeza que se utiliza para diversas finalidades, nos mais variados campos do conhecimento humano. Embora numa primeira impressão possa parecer que é de fácil determinação, uma análise mais rigorosa acaba por concluir que sua obtenção por vezes exige metodologias e cálculos revestidos de significativo volume de trabalho. Para poder avaliar uma determinada área, deve-se ter em mente, por exemplo, considerações como:

- a) o tamanho da superfície: traduz a questão das dimensões e a magnitude do problema de sua determinação. Como exemplo, pode-se citar a área relativa de uma sala de jantar e a área da Amazônia Legal;
- b) a geometria da superfície: traduz a questão da forma. Como exemplo, pode-se citar a área de um terreno pertencente a um loteamento de geometria regular, a área inundada pelo reservatório de uma barragem, ou a área da cobertura de um ginásio esportivo;

- c) a interação da medida com a superfície: traduz a questão de se poder medir ou não diretamente uma área. Como exemplo, pode-se citar a medida da área de um piso que vai ser revestido ou a área de uma mancha de óleo que se estende pela superfície do oceano;
- d) o erro tolerável permitido no cálculo: traduz a questão da adequação entre o valor encontrado e a finalidade para o qual se destina. Como exemplo, pode-se citar a área de uma queimada ou a área ocupada por uma propriedade localizada numa região altamente valorizada em termos imobiliários.

Considerando os pontos anteriores e direcionando o cálculo de áreas para aplicações na Engenharia, é importante ressaltar certas características, a saber:

- a) que sua determinação pode exigir o cálculo de áreas em superfícies curvas;
- b) que sua determinação pode exigir o emprego de documentos que representem a realidade - documentos de natureza cartográfica e/ou topográfica, que por sua natureza são representações planas;
- c) que o erro em sua determinação pode ser aceitável tanto com o emprego de metodologias expeditas - planímetros - como por meio de processos mais exatos, como os analíticos.

Este trabalho considera os cálculos de áreas em superfícies curvilíneas, concretamente sobre um elipsóide de revolução considerado representativo da forma da Terra, e em documentos cartográficos no sistema de

coordenadas UTM, por ser este o oficialmente empregado no mapeamento sistemático e na maioria dos projetos que exigem a atividade de mapear, utilizando processos totalmente analíticos.

## 02. OBJETIVOS

Como se sabe, o sistema UTM mantém a forma das feições na vizinhança de um determinado ponto, mas não as distâncias e as áreas. Assim, o principal objetivo deste trabalho é mostrar o efeito das distorções que ocorrem e descrever uma metodologia que, partindo de cartas UTM, possibilite o cálculo da correspondente área da superfície terrestre.

## 03. METODOLOGIA

Serão calculadas as áreas elipsóidicas no sistema geodésico SAD-69 - *South American Datum 1969* - a partir do emprego das coordenadas curvilíneas geodésicas, referentes aos limites das cartas nas escalas de 1:1.000.000 até 1:25.000 - divisão oficial relativa ao mapeamento sistemático. Estes valores serão comparados com as áreas planas obtidas com as coordenadas UTM, bem como com as áreas planas corrigidas da respectiva distorção, considerando dois diferentes critérios de cálculo. Nota-se que é necessário o emprego de uma expressão analítica para cálculo das áreas planas já que as cartas não são "figuras" regulares (ou seja, nem quadrados, nem retângulos). Será empregada a fórmula de Gauss, cuja expressão usada está demonstrada em Ferreira (1989), e tem a forma que se segue:

$$2 S_p = \sum_{n=1}^n X_n [ Y_{n-1} - Y_{n+1} ]$$

#### 04. MAPAMENTO SISTEMÁTICO

Mapeamento sistemático é aquele que permite um recobrimento total do território nacional em diversas escalas, visando gerar informações para apoio a tomada de decisões. Compreendem escalas que possibilitam uma visão macro do território - basicamente finalidade geográfica, até escalas propícias a estudos de viabilidade de projetos, tendo como atributo indispensável uma perfeita articulação entre elas, garantida pelo seus formatos.

São elas:

ESCALA	FORMATO
1:1.000.000	4° 00' 00" x 6° 00' 00"
1: 500.000	2° 00' 00" x 3° 00' 00"
1: 250.000	1° 00' 00" x 1° 30' 00"
1: 100.000	0° 30' 00" x 0° 30' 00"
1: 50.000	0° 15' 00" x 0° 15' 00"
1: 25.000	0° 07' 30" x 0° 07' 30"

Diante das necessidades de âmbito cadastral, de implantação de projetos, entre outros, exige-se o mapeamento em escalas maiores que possibilitem representações mais detalhadas da superfície. Embora não oficialmente, existe uma proposta que vem sendo aceita e largamente utilizada. Como no mapeamento sistemático, apresentam perfeita articulação entre si, como pode ser visto a seguir:

ESCALA	FORMATO
1: 20.000	0° 06' 00" x 0° 06' 00"
1: 10.000	0° 03' 00" x 0° 03' 00"
1: 5.000	0° 01' 30" x 0° 01' 30"
1: 2.000	0° 00' 36" x 0° 00' 36"
1: 1.000	0° 00' 18" x 0° 00' 18"
1: 500	0° 00' 09" x 0° 00' 09"

#### 05. CÁLCULO DAS ÁREAS DE ZONAS ELIPSÓIDICAS

As áreas das zonas elipsóidicas foram calculadas através da expressão apresentada a seguir, fornecida por Zakatov (1981). A demonstração da expressão não será apresentada, visto fugir dos objetivos do trabalho. Entretanto, poderá ser encontrada na referência citada ou em qualquer literatura especializada no contexto da Geodésia Geométrica. A expressão é da forma:

$$S = 4 \pi b^2 \{ AL * \sin(0,5 \Delta \phi) * \cos(1 * \phi) + \\ - BL * \sin(1,5 \Delta \phi) * \cos(3 * \phi) + \\ + CL * \sin(2,5 \Delta \phi) * \cos(5 * \phi) + \\ - DL * \sin(3,5 \Delta \phi) * \cos(7 * \phi) + \\ + EL * \sin(4,5 \Delta \phi) * \cos(9 * \phi) \},$$

onde :

$$AL = 1 + (1/2)e^2 + (3/8)e^4 + (5/16)e^6 + (35/128)e^8 ;$$

$$BL = (1/6)e^2 + (3/16)e^4 + (3/16)e^6 + (35/192)e^8 ;$$

$$CL = (3/80)e^4 + (1/16)e^6 + (5/64)e^8 ;$$

$$DL = (1/112)e^6 + (5/256)e^8 ;$$

$$EL = (5/2304)e^8 ;$$

b = semi-eixo menor do elipsóide ;

$\Delta \phi$  = diferença de Latitude ;

$e^2$  = segunda excentricidade;

$\phi$  = Latitude média.

## 06. SISTEMA DE COORDENADAS UTM

De acordo com Krakiwsky (1974), a Projeção Transversa de Mercator - também conhecida por Projeção de Gauss ou Projeção de Gauss - Krüger, é um dos belos exemplos dado pela Cartografia no que se refere a conjugação de esforços no desenvolvimento de uma ciência. Foi criada por Lambert em 1772, formalizada matematicamente por Gauss 50 anos depois, e finalmente implementada por Krüger em 1912. É interessante evidenciar as diferenças entre a Projeção Transversa de Mercator e o Sistema de Coordenadas UTM.

São exigências da Projeção Transversa de Mercator:

- a escala ser verdadeira ao longo do Meridiano Central;
- a origem da coordenada Y ( N ) ser no Equador;
- a origem da abscissa X ( E ) ser no Meridiano Central.

Já a definição do Sistema de Coordenadas UTM exige o cumprimento das seguintes especificações adicionais:

- emprego da Projeção Transversa de Mercator e fusos de 6°;
- adoção de um elipsóide de referência. No caso do Brasil, o adotado é o UGGI-67;
- origem da Latitude e Longitude: coincidentes com a da Projeção Transversa de Mercator;
- unidade de medida linear: o metro;
- falsa ordenada Y ( N ): 0 m para o hemisfério Norte, e de 10.000.000

m para o hemisfério Sul;

- falsa abscissa X ( E ): 500.000 m;
- fator de escala no Meridiano Central: 0,9996;
- numeração dos fusos: começando por 1 para o fuso limitado pelos meridianos 180° - 174° W, e incrementando de 1 até 60 para o fuso 174° - 180° E;
- latitudes limites para emprego do Sistema são de 80° N e 80° S. São encontrados na literatura, outros valores para estes limites, que variam de 60° à 80°.

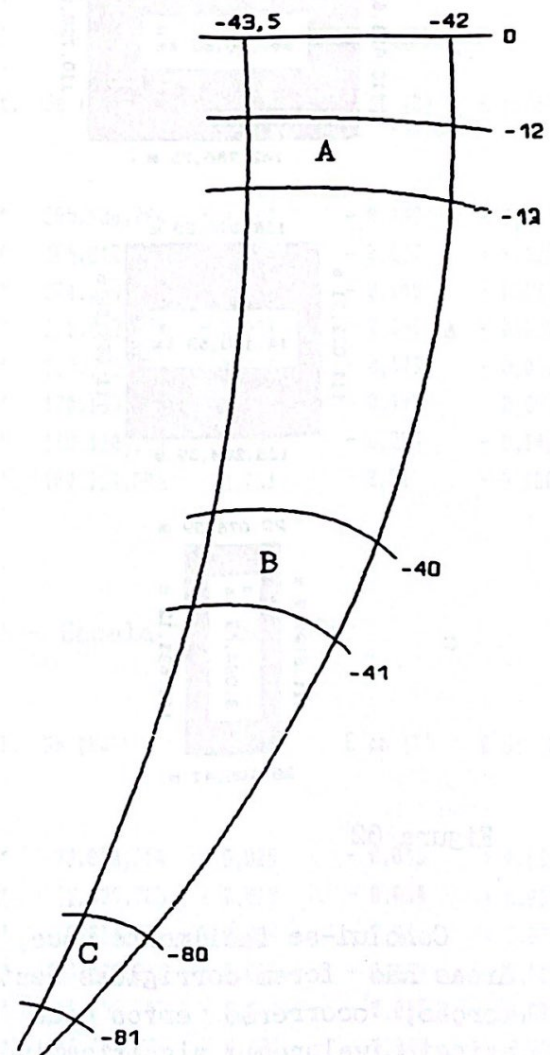


Figura 01

A propriedade intrínseca do Sistema é a conformidade. Assim, são mantidas as formas de pequenas feições, em detrimento da manutenção dos valores lineares e, conseqüentemente, dos valores de áreas. Este fato pode ser facilmente identificado pela comparação das dimensões de cartas pertencentes a uma mesma escala, localizadas em latitudes diferentes dentro de um mesmo fuso. Como exemplo, tomem-se três folhas na escala 1:250.000, nas latitudes de -12°, -40°, e -80° cuja localização no fuso pode ser observada na Figura 01 e cujos croquis respectivos encontram-se na Figura 02.

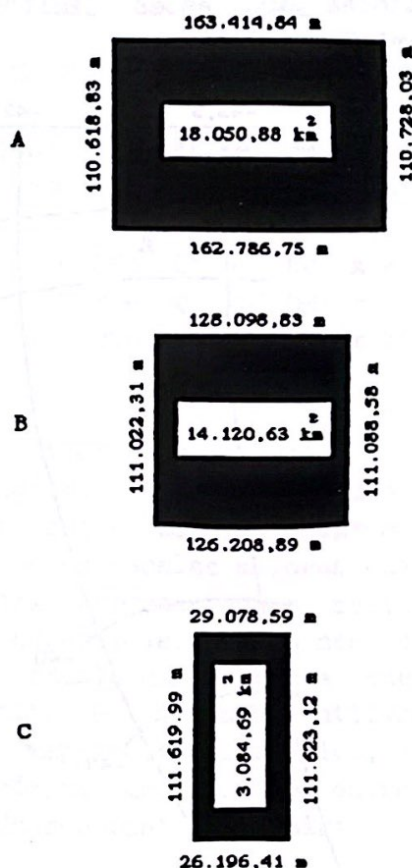


Figura 02

Conclui-se facilmente que, se as áreas não forem corrigidas desta distorção, ocorrerão erros que podem atingir valores significativos aos seus propósitos.

#### 07. FATOR DE DISTORÇÃO EM ARRA - Ka

O fator Ka pode ser obtido pela divisão da área elipsoidal - Se - pela correspondente área no sistema UTM - Sp. Visto não ser uma fórmula de aplicação prática, é necessário que se tenha uma expressão que considere somente elementos definidos no sistema de UTM.

Da teoria das deformações, tem-se genericamente que:

$$Ka = \frac{dA}{da} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{eg-f^2}} = \frac{Se}{Sp}$$

No caso específico da representação do elipsóide de revolução por intermédio da projeção de Gauss, as linhas coordenadas em ambas as superfícies assumem trajetórias ortogonais: a rede de meridianos e paralelos são ortogonais na superfície do elipsóide e a malha de coordenadas planas corresponde a um sistema cartesiano bi-dimensional. Como consequência, os termos  $F^2$  e  $f^2$  são anulados.

De modo geral, as escalas de distorções lineares ao longo dos meridianos e paralelos,  $m_0$  e  $m_{90}$ , respectivamente, são fornecidas por:

$$m_0 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{e}} \quad e \quad m_{90} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$$

No caso específico, considerando a condição de conformidade, estas escalas são iguais em todas as direções e, conseqüentemente, nos dois eixos. No sistema UTM é conhecida por Coeficiente de Deformação de Escala ou Fator K. Assim:

$$K = m_0 = m_{90}$$

e em decorrência do exposto,

$$K_a = K^2.$$

## 08. TESTES

Os testes a serem efetuados se resumem na obtenção dos erros percentuais referentes as áreas corrigidas da distorção, considerando diversas folhas pertencentes as escalas propostas no mapeamento sistemático.

Para tanto, foi assumido como valor de referência a área da zona elipsóidica correspondente as folhas, por ser esta a superfície matemática empregada na execução dos cálculos geodésicos e cartográficos.

Para cada folha foi calculada a área plana por aplicação da fórmula de Gauss. Este valor foi corrigido da deformação em área de acordo com a fórmula anterior. Neste contexto surge um problema. O Fator de escala K é variável para cada ponto do plano UTM. Foram propostas duas soluções: a primeira, assumiu o valor do K médio calculado a partir dos K's de cada canto; a segunda, tomou por base o K calculado para o ponto central da folha.

## 09. RESULTADOS E ANALISE

Os resultados são apresentados para as diferentes escalas nas tabelas dadas abaixo. Para tanto, entende-se por:

Lat : coordenada referente ao canto inferior esquerdo das folhas;

Se : valor da área elipsoidal em Km<sup>2</sup>;

Ep : erro percentual da área UTM com relação a área elipsoidal;

E pm: erro percentual da área UTM corrigida do fator K<sub>a</sub> - média dos valores dos cantos - com relação a área elipsoidal;

E pc: erro percentual da área UTM corrigida do fator K<sub>a</sub> - valor do ponto central da folha - com relação a área elipsoidal.

### a) - Escala 1 : 1.000.000

Lat.	Se (Km <sup>2</sup> )	Ep (%)	E pm (%)	E pc (%)
0°	295.186,294	+ 0,063	- 0,132	+ 0,143
12°	286.812,272	+ 0,042	- 0,137	+ 0,122
20°	274.368,791	+ 0,012	- 0,145	+ 0,092
32°	245.892,487	- 0,051	- 0,161	+ 0,029
40°	220.815,958	- 0,101	- 0,173	- 0,021
52°	175.138,042	- 0,177	- 0,192	- 0,097
60°	140.120,198	- 0,222	- 0,203	- 0,142
68°	102.222,590	- 0,260	- 0,212	- 0,180

### b) - Escala 1 : 500.000

Lat.	Se (Km <sup>2</sup> )	Ep (%)	E pm (%)	E pc (%)
0°	73.840,354	+ 0,025	- 0,033	+ 0,036
10°	72.529,783	+ 0,019	- 0,034	+ 0,033
20°	69.064,793	+ 0,004	- 0,036	+ 0,024
30°	63.528,265	- 0,018	- 0,039	+ 0,012
40°	56.058,752	- 0,044	- 0,043	- 0,004
50°	46.854,096	- 0,072	- 0,047	- 0,020
60°	36.173,213	- 0,098	- 0,050	- 0,034
70°	24.333,915	- 0,119	- 0,053	- 0,046

c) - Escala 1 : 250.000

Lat	Se (Km²)	Ep (%)		E pa (%)	E pc (%)
		Máx	Min		
0°	18.462,825	+ 0,084	- 0,054	- 0,008	+ 0,009
10°	18.162,411	+ 0,078	- 0,055	- 0,008	+ 0,008
20°	17.322,688	+ 0,062	- 0,059	- 0,009	+ 0,006
30°	15.963,785	+ 0,038	- 0,064	- 0,010	+ 0,003
40°	14.119,380	+ 0,009	- 0,071	- 0,011	- 0,001
50°	11.838,414	- 0,022	- 0,078	- 0,012	- 0,005
60°	9.184,778	- 0,051	- 0,084	- 0,013	- 0,008
70°	6.237,223	- 0,074	- 0,089	- 0,013	- 0,011

d) - Escala 1 : 100.000

Lat	Se (Km²)	Ep (%)		E pa (%)	E pc (%)
		Máx	Min		
0°	3.877,252	+ 0,153	- 0,077	- 0,001	+ 0,001
10°	3.829,453	+ 0,145	- 0,078	- 0,001	+ 0,001
20°	2.891,714	+ 0,124	- 0,078	- 0,001	0,000
30°	2.667,320	+ 0,093	- 0,079	- 0,001	0,000
40°	2.361,863	+ 0,054	- 0,079	- 0,002	0,000
50°	1.983,399	+ 0,014	- 0,080	- 0,002	- 0,001
60°	1.542,525	- 0,024	- 0,081	- 0,002	- 0,001
70°	1.052,308	- 0,055	- 0,081	- 0,002	- 0,002

e) - Escala 1 : 50.000

Lat	Se (Km²)	Ep (%)		E pa (%)	E pc (%)
		Máx	Min		
0°	769,320	+ 0,174	- 0,079	0,000	0,000
30°	667,661	+ 0,109	- 0,080	0,000	0,000
60°	387,094	- 0,018	- 0,080	0,000	0,000
75°	199,987	- 0,064	- 0,080	0,000	0,000

f) - Escala 1 : 25.000

Lat	Se (Km²)	Ep (%)		E pa (%)	E pc (%)
		Máx	Min		
0°	192,330	+ 0,185	- 0,080	0,000	0,000
30°	167,019	+ 0,118	- 0,080	0,000	0,000
45°	136,766	+ 0,052	- 0,080	0,000	0,000
60°	96,956	- 0,015	- 0,080	0,000	0,000
75°	50,202	- 0,063	- 0,080	0,000	0,000

10. CONCLUSÕES

Do desenvolvimento exposto, pode-se retirar algumas conclusões, a saber:

a) a aplicação do fator Ka nos documentos em escala pequena deve ser feita segundo uma análise mais rigorosa, já que os valores corrigidos podem apresentar erro maior do que a área UTM sem a respectiva correção. O fato é explicado mediante seu posicionamento no interior do fuso. A folha na escala de 1 : 1.000.000 apresenta seus limites situados nas bordas do fuso e portanto os valores de K para cada ponto dos cantos não são representativos de toda a região abrangida; a folha de 1 : 500.000 apresenta um limite em zona de ampliação - borda do fuso - e o outro coincidente com o meridiano central. Assim, ao assumir posições características, não é representativa a escolha dos cantos para a determinação do coeficiente de deformação de área;

b) os documentos em escalas médias apresentaram melhores resultados quando corrigidos do coeficiente de deformação Ka - já que sua área menor permite um comportamento mais homogêneo das distorções - sendo que, das duas opções testadas, a que apresentou menores discrepâncias foi a área obtida com o Ka do ponto central;

c) apesar das escalas maiores que 1 : 25.000 não serem apresentadas, é evidente que o fator Ka deva ser aplicado, pois todos os valores corrigidos apresentam erro desprezível, independente do critério de cálculo ou mesmo da latitude considerada.

Finalmente, apesar dos baixos valores percentuais, recomenda-se a aplicação deste fator de correção quando do emprego de documentos cartográficos representados no sistema UTM. A título de exemplo, os 0,153 % de erro na folha de 1 : 100.000, correspondem, no terreno, à aproximadamente 4,71 km<sup>2</sup>.

## 11. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Alguns temas poderiam dar continuidade ao trabalho, tais como:

- a) uma metodologia que permitisse o cálculo de áreas poligonais e de limites curvos diretamente no elipsóide;
- b) a influência devida a adoção de planos médios topográficos, considerando as áreas em diferentes latitudes bem como em diversas altitudes;
- c) estudo de outra distribuição de pontos, selecionados para determinação de um fator de deformação que seja adequado à conversão das áreas planas calculadas a partir de coordenadas projetivas à sua correspondente geodésica, em escalas menores que 1 : 100.000;
- d) experimentos de natureza mais prática, como por exemplo, o cálculo da área do Brasil, de seus estados, municípios com os respectivos erros associados.

## 12. BIBLIOGRAFIA

CARVALHO, F.R. Articulação Sistemática de Folhas de Cartas. Índice Cartográfico Modular. Brasília. Presidência da República - Secretaria de Pla-

nejamento. Informativo COCAR, número especial CGP-05. Janeiro, 1985. 197 - 235 pp.

FERREIRA, L.F. & OLIVEIRA L.C. Cálculo de Áreas Planas. Rio de Janeiro, Instituto Militar de Engenharia. 1989. 72 pp.

HRADILEK, L. & HAMILTON, A.C. A Systematic Analysis of Distortions in Map Projections. Lecture Notes # 34. Fredericton. University of New Brunswick. 1973. 37 pp.

KRAKIWSKY, E.J. Conformal Map Projections in Geodesy. Lecture Notes # 37. Fredericton. University of New Brunswick. 1974. 142 pp.

MAILING, D.H. Coordinate Systems and Map Projections. London. George Philip and Son Limited. 1980. 255 pp.

PEARSON, F. Map Projections: Theory and Applications. Flórida, CRC Press, Inc. 1990. 372 pp.

RICHARDUS, P. & ADLER, R.K. Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers. Amsterdam. North Holland Pub. Co. 1972. 173 pp.

SNYDER, J. Map Projections - A Working manual / G. S. Professional Paper 1395. Reston. U. S. Geological Survey. 1987. 383 pp.

THOMAS, P.D. Conformal Projections in Geodesy and Cartography. Special Publication # 251. Washington. U. S. Department of Commerce. 1952. 142 pp.

ZAKATOV, P.S. Curso de Geodésia Superior. Moscú. Editorial MIR. 1981. 635 pp.