UM MODELO MATEMÁTICO PARA A FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA NO PLANO

Prof. Dr. QUINTINO DALMOLIN
UFPR - Universidade Federal do Paraná
Deptº de Geociências
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
Caixa Postal 19011
Curitiba- Paraná - Brasil

Resumo. Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo matemático para determinar, com controle de qualidade, a posição planimétrica de pontos na superfície física da Terra através de: 1) medidas realizadas sobre fotografias aéreas "aproximadamente verticais"; 2) ajustamento em bloco por feixe de retas radiais e; 3) um mínimo de pontos de controle para referenciar o sistema cartográfico. O modelo foi testado e os resultados obtidos permitem recomendar a sua aplicação nos levantamentos planimétricos de pontos em substituição ou complementação dos trabalhos topográficos convencionais de campo.

Abstract. In this paper, we developed a mathematical model to determine the planimetric position of points on the physical surface of the Earth, with quality control, by means of: 1) measures made upon aerial photographs which are "slightly vertical"; 2) block adjustment by means of a bundle of radial lines, and 3) a minimal of control points to fix the cartographic system. The model was tested and the obtained results led us to recommned the planimetric determination of points in order to replace or complete the topographic surveying.

01 - INTRODUÇÃO

A equação de colinearidade é mundialmente consagrada nos meios fotogramétricos e cartográficos como o modelo matemático funcional básico para o ajustamento em Fototriangulação Analítica. Este modelo, quando fixado o sistema de referência, proporciona além das coordenadas tridimensionais dos pontos de interesse do espaço objeto, os elementos de orientação exterior da câmara no instante da tomada da fotografia simultaneamente.

Considerando a geometria de uma fotografia aérea, a projeção vertical do centro perspectivo determina nos planos da fotografia e do terreno os pontos n e N. Estes pontos são chamados respectivamente de nadir fotográfico e nadir de terreno (fig.01).

O plano que contém os pontos nadir fotográfico, centro perspectivo e ponto principal da fotografia, é chamado de plano principal, o qual determina no plano da fotografia a linha principal no com projeção no terreno em NO.

Desta forma, o sistema de orientação da fotografia fica definido pelos parâmetros Xo , Yo, Zo, w, Φ e k, recuperados no ajustamento. Se admitirmos o sistema do espaço imagem paralelo ao sistema do espaço objeto, a matriz de orientação se degenera na matriz identidade representando uma foto vertical onde o ponto principal da fotografia coincide com o centro fiducial da mesma. Ou seja, numa câmara "perfeita" o ponto nadir da fotografia coincide com o ponto principal e este por sua vez com o centro fiducial. Contudo, quando a fotografia aérea não é vertical somada às ondulações do relevo, a posição da imagem dos pontos provenientes do espaço objeto sofrem desvios projetivos. O grau destes desvios em relação ao plano da fotografia está na dependência da amplitude da inclinação da fotografia e do desnível entre os pontos do terreno. O deslocamento devido ao relevo, produz uma variação da escala em função da altitude dos pontos a partir do nadir, enquanto que o deslocamento devido a inclinação se dá a partir do isocentro [02].

A Fig. 01, ilustra com precisão a complexidade do problema quando se combina os dois efeitos: inclinação e relevo na posição da imagem de pontos em fotografias inclinadas.

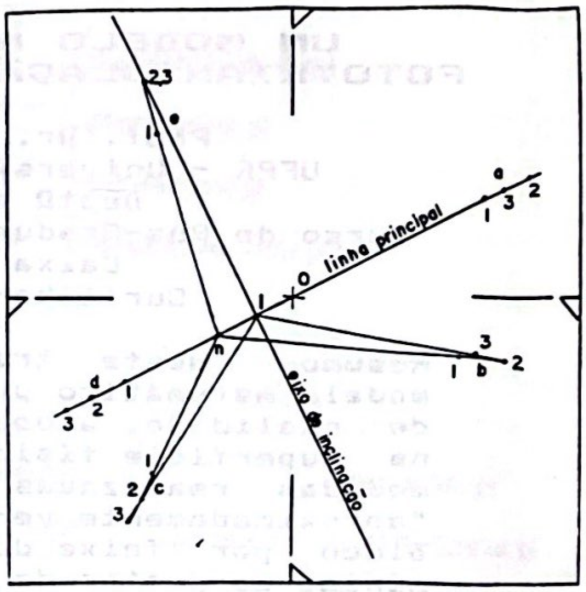

Fig.01 - Efeito combinado da inclinação e do relevo.

A posição marcada com o número 1 é a posição da imagem na fotografia relativa ao ponto no datum; a marcada com o número 2 é a posição da imagem após ter sofrido o deslocamento devido ao relevo e a marcada com o número 3 é a posição após ter sofrido o deslocamento devido a inclinação da fotografia.

Nota-se que para os pontos a e b o deslocamento tende a se cancelar. Para os pontos c e d o efeito é acumulativo enquanto que para o ponto e não há deslocamento algum devido a inclinação (está situado sobre o eixo de inclinação), o que caracteriza a influência da posição do ponto em relação ao eixo de inclinação e linha principal. Em Fotogrametria esta complexidade é relevada pelo fato de que as quantidades e direções devido a inclinação serem randômecas e de difícil determinação.

Nesta pesquisa desenvolveu-se e testa-se um modelo matemático com o objetivo de minimizar o problema acima e estimar com maior confiabilidade o posicionamento de pontos planimétricos para o mapeamento temático.

02 - MODELO MATEMÁTICO FUNCIONAL

O modelo matemático foi desenvolvido com base na Fig.02, na qual: (x,y): é o sistema de referência do espaço imagem;
(X,Y,Z): é o sistema de referência do espaço objeto;
C: é o centro perspectivo, ou a estação de exposição;
(x_n,y_n) e (X_N,Y_N): são as coordenadas do centro de projeção no espaço imagem e no espaço objeto respectivamente.

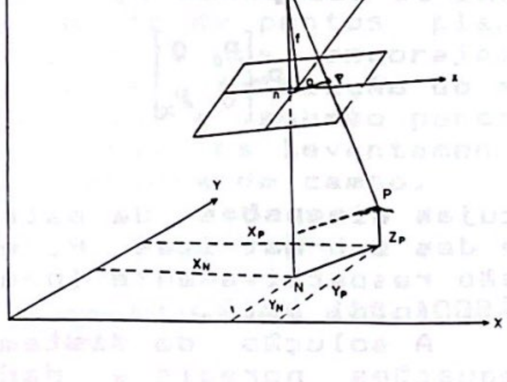

Fig. 02

Um ponto $P(X,Y,Z)$ do espaço objeto tem sua imagem em $p(x,y)$ no espaço imagem.

Da Álgebra vetorial prova-se que, os vetores Cp e CP bem como os vetores Cn e CN são colineares, MASRY 1977 [03]. Também os vetores np e NP são coplanares, desde que as fotocoordenadas estejam referidas a um sistema (x^*,y^*,z^*) identicamente orientado com o sistema (X,Y,Z) do espaço objeto.

Assim, os vetores coplanares podem ser expressos pela equação da reta,

$$\frac{x_n^*-x_p^*}{X_N-X_P}=\frac{y_n^*-y_p^*}{Y_N-Y_P}=t \qquad (1)$$

onde: t é o fator de proporcionalidade de escala em cada ponto.

A equação (2.6) pode ser escrita:

$$\begin{bmatrix} x_{np}^* \\ y_{np}^* \end{bmatrix} = t.\begin{bmatrix} X_{NP} \\ Y_{NP} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

A aplicação de uma rotação k em torno do eixo z* torna o sistema (x*, y*, z*) paralelo ao sistema fotogramétrico (x,y,z), cujas coordenadas do ponto p são expressas em DALMOLIN, 1992 [01] por:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k & \operatorname{sen} k \\ -\operatorname{sen} k & \cos k \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_p^* \\ y_p^* \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Esta expressão pode ser manipulada algebricamente e derivar o modelo matemátcio proposto por DALMOLIN em 1992 [01].

$$\begin{bmatrix} x_p - x_n \\ y_p - y_n \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} \cos k(X_p - X_N) + \operatorname{sen} k(Y_p - Y_N) \\ -\operatorname{sen} k(X_p - X_N) + \cos k(Y_p - Y_N) \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou

$$x_p = t[\cos k(X_p - X_N) + \operatorname{sen} k(Y_p - Y_N)] + x_n$$

$$y_p = t[-\operatorname{sen} k(X_p - X_N) + \cos k(Y_p - Y_N)] + y_n \quad (5)$$

É importante observar que para cada ponto medido no espaço imagem, o modelo fornece duas equações de observação com oito parâmetros.

03 - MODELO MATEMÁTICO DE AJUSTAMENTO

O modelo matemático funcional apresentado pela equação acima caracteriza o método paramétrico de ajustamento, cujos parâmetros desconhecidos x_n, y_n, X_N, Y_N, X, Y, t e k do modelo funcional são recuperados através de um ajustamento simultâneo em bloco de retas radiais a partir do centro de projeção. Estes parâmetros não são totalmente desconhecidos. Eles podem ser ponderados desde que o seu valor aproximado seja estimado com uma determinada precisão a partir de uma carta ou mapa. Desta forma, as observações das foto-coordenadas serão ponderadas em função da precisão do equipamento com o qual foram obtidas (Σ_L) e os parâmetros serão ponderados em função da precisão com que são extraídas da carta ou mapa (Σ_X).

Assim a função do estimador de Mínimos Quadrados do modelo acima é,

$$V^T P V + X^T P_X X = \min \quad (6)$$

Sendo o método de ajustamento o paramétrico, o vetor dos resíduos é expresso por um vetor matricial $[V\ X]^T$ com dimensões (n+u,-1); onde n é o número de equações de observação e u o número de parâmetros incógnitos.

A sua correspondente matriz dos pesos é,

$$P = \begin{bmatrix} P_V & 0 \\ 0 & P_X \end{bmatrix} \quad (7)$$

cujas dimensões da matriz P e das sub-matrizes P_V e P_X são respectivamente (n+u,n+-u), (n,n) e (u,u).

A solução do sistema de equações normais é dado em DALMOLIN, 1992 [01];

$$X = (N + P_X)^{-1} U \quad (8)$$

Cujos parâmetros ajustados após a estabilização da solução é:

$$X_a^{i} = X_a^{i-1} + X^{i} \tag{9}$$

04 - RESULTADOS E CONCLUSÕES

O modelo matemático foi testado na realização de uma fototriangulação analitica com dados simulados composta de 6 fotografias e 17 pontos triangulados na escala 1:10.000.

Com dois pontos de controle o erro médio planimétrico foi da ordem de 79cm. Com três pontos de controle este mesmo erro situou-se em 38cm, enquanto que, quando se usou quatro pontos, os resultados não apresentaram melhoria significativa. Estes resultados atendem plenamente as especificações cartográficas para o posicionamento de pontos planimétricos e nos encorajam a sugerir a utilização do modelo para a subsão parcial e/ou total os levantamentos topográficos de campo.

05 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[01] DALMOLIN,Q. Topogrametria: Uma Nova Técnica para a Determinação de Pontos Planimétricos Através da Fotogrametria Analítica. Curitiba UFPR Tese de Professor Titular em Ciências Geodésicas. 1992. 60p.

[02] Manual of Photogrammetry fourth Ed., Falls Church. ASP 1980.

[03] MASRY, S.E. Basics of Instrumental and Analytical Photogrammetry. Fredericton, U.N.B., Departament of Surveying Engineering. Lecture Notes nº 33. 1977, 129p.