VÉRTICES VIRTUAIS TOOLBOX: FERRAMENTA DE CÓDIGO ABERTO PARA PROPAGAÇÃO RIGOROSA DE INCERTEZAS DE VÉRTICES VIRTUAIS NO CADASTRO TERRITORIAL BRASILEIRO

Virtual Points Toolbox: *Open-Source Tool for Rigorous Uncertainty Propagation of Virtual Vertices in the Brazilian Territorial Cadastre*

Ellyon Magri Martins [1]

Tiago Lima Rodriges [2]

Ivandro Klein [3]

RESUMO: Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta gratuita no ambiente QGIS (*Vértices Virtuais Toolbox*) para a determinação das incertezas das coordenadas de vértices virtuais no cadastro territorial brasileiro, baseada na Lei de Propagação de Variâncias e Covariâncias (LPVC). Vértices virtuais são pontos fisicamente inacessíveis cujas coordenadas são obtidas por construções geométricas indiretas, tais como interseção de retas, interseção angular, interseção linear, regra do paralelogramo e linhas paralelas. A ferramenta implementa a referida lei para cada um dos cinco métodos de posicionamento indireto, considerando os modelos matemáticos funcionais de cada método. A validação utilizou dois conjuntos de dados: dados reais obtidos no contexto do Termo de Execução Descentralizada (TED) n.º 27/2021/DF/SEDE/INCRA e dados coletados na Rede Topográfica da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Os resultados demonstram a consistência da metodologia proposta e da ferramenta desenvolvida, bem como a possibilidade de conformidade com os requisitos da Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais (NTGIR) 3.ª edição e da norma técnica ABNT NBR 17.047/2022 para imóveis urbanos, em termos de incerteza posicional.

Palavras-chave: Cadastro territorial; vértices virtuais; propagação de incertezas; QGIS; georreferenciamento.

ABSTRACT: This work presents the development of a free tool in the QGIS (*Virtual Points Toolbox*) environment for determining the coordinate uncertainties of virtual points in the Brazilian territorial cadastre, based on the Law of Covariances Propagation (LoCP). Virtual points are physically inaccessible points whose coordinates are obtained through indirect geometric constructions, such as line intersection, angular intersection, linear intersection, the parallelogram rule, and parallel lines. The tool implements the aforementioned law for each of the five indirect positioning methods, considering the functional mathematical models of each method. The validation used two datasets: real data obtained in the context of the Decentralized Execution Agreement (TED) No. 27/2021/DF/SEDE/INCRA, and data collected from the Topographic Network of the Federal University of Paraná (UFPR). The results demonstrate the consistency of the proposed methodology and the developed tool, as well as the possibility of compliance with the requirements of the Technical Standard for Georeferencing of Rural Properties (NTGIR) 3rd edition and the ABNT NBR 17.047/2022 technical standard for urban properties, in terms of positional uncertainty.

Keywords: Territorial cadaster; virtual points; uncertainty propagation; QGIS; georeferencing.

1 INTRODUÇÃO

A legislação atual reforça a segurança jurídica da propriedade ao exigir a vinculação dos vértices ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) e a adoção de uma precisão posicional

[1] UFPR – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas / ellyon@ufpr.br
[2] UFPR – Departamento de Geomática / tiagorodrigues@ufpr.br
[3] IFSC – Campus Florianópolis / ivandroklein@ufpr.br

adequada (ROSALEN; MUNHOZ; MARDEGAN, 2012). Isso garante padronização e controle de qualidade na demarcação de divisas territoriais (TOLEDO; BERTOTTI, 2014).

O cadastro territorial moderno (INCRA, 2013; ABNT, 2022) exige a definição inequívoca dos limites geodésicos. No entanto, um desafio técnico recorrente é a determinação da incerteza de "vértices virtuais" — pontos fisicamente inacessíveis, quinas de edificações ou resultantes de construções geométricas. Na prática, por simplificação ou falta de metodologias padronizadas, esses vértices costumam herdar erroneamente as incertezas dos pontos de referência mais próximos.

Para contornar esse problema, a Lei de Propagação de Variâncias e Covariâncias (LPVC) oferece a base matemática rigorosa para quantificar a incerteza posicional indireta (GEMAEL; MACHADO; WANDRESEN, 2016; OGUNDARE, 2016). Recentemente, modelos matemáticos funcionais foram propostos e validados para diferentes configurações geométricas (MARTINS et al., 2026), estabelecendo uma sólida base teórica.

O desafio atual é transpor essa teoria para a prática. Portanto, o objetivo deste trabalho é implementar os modelos de propagação de incertezas para VVs (vértices virtuais) em um ambiente de Sistema de Informação Geográfica (SIG). O estudo validará a ferramenta desenvolvida utilizando dados reais de levantamentos rurais e urbanos, atestando sua aplicabilidade frente às normas técnicas vigentes.

O QGIS foi escolhido como plataforma por ser de código aberto e, combinado à biblioteca PyQGIS, permitir a criação de uma ferramenta acessível e integrável aos fluxos profissionais (QGIS DEVELOPMENT TEAM, 2026; GRASER; OLAYA, 2015). O potencial dessa abordagem é corroborado pelo sucesso de plugins recentes voltados ao cadastro e à acurácia posicional, como o GeoINCRA (SILVANO et al., 2022) e o GeoPEC (GONÇALVES; RODRIGUES; SANTOS, 2024).

Embora a literatura já aborde a propagação de incertezas no cadastro, seja na avaliação por interseção à vante (COELHO; CHAVES, 2015), nas discrepâncias entre métodos de levantamento (MICHELS; SILVA; SOUZA, 2021) ou na congruência GNSS em mapas oficiais (DARDANELLI; MALTESE, 2022), a presente ferramenta inova. Ela se diferencia por integrar, em um único plugin de código aberto, os cinco métodos de posicionamento indireto relevantes para o cadastro nacional, com jacobianas analíticas obtidas simbolicamente e suporte completo a matrizes de covariância não diagonais.

2 METODOLOGIA

2.1 Fundamentos Matemáticos e Lei de Propagação de Variâncias e Covariâncias

A fundamentação matemática central deste trabalho é a LPVC, que permite propagar quantitativamente a incerteza das observações de entrada para as coordenadas do VV calculado. Na forma matricial, a LPVC é expressa por (MIKHAIL; ACKERMANN, 1976):

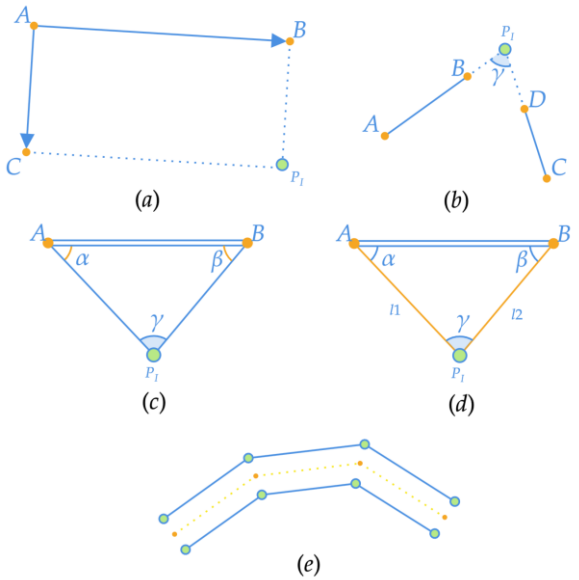
$$\Sigma_{(X_{P_I}, Y_{P_I})} = J_i \Sigma_i J_i^T \quad (1)$$

onde $\Sigma_{(X_{P_I}, Y_{P_I})}$ é a matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas planimétricas

(X_{PI}, Y_{PI}) do VV, J_i é a matriz Jacobiana e Σ_i é a matriz de variâncias-covariâncias das observações. Essa formulação encontra amparo consolidado na literatura (MIKHAIL; ACKERMANN, 1976; GHILANI, 2017) e é amplamente empregada no ajustamento de observações geodésicas para modelos matemáticos funcionais lineares e não lineares pelo método dos mínimos quadrados.

Para o caso da legislação brasileira, os seguintes métodos podem ser utilizados para o cálculo de coordenadas de VVs: interseção de retas, interseção angular, interseção linear, regra do paralelogramo e linhas paralelas (Figura 1). Baseado nisso, Martins *et al.* (2026) deduziram e explicitaram os modelos matemáticos de propagação.

Figura 1 - Métodos de posicionamento geométrico indireto; (a) Regra do paralelogramo; (b) Interseção de dois segmentos de reta; (c) Interseção angular; (d) Interseção linear; (e) Método de linhas paralelas.



Fonte: Martins et. al (2026).

Para os métodos de interseção de retas e linhas paralelas, as jacobianas são obtidas de forma direta. Já nos métodos de interseção angular, interseção linear e regra do paralelogramo, as funções envolvem relações trigonométricas não lineares, o que exige o emprego de derivadas parciais primeiras, ao se utilizar somente o termo de ordem uma das séries de Taylor para linearização. Para tanto, a biblioteca SymPy, de computação simbólica em Python, foi utilizada para a derivação analítica das jacobianas, garantindo a exatidão matemática das expressões parciais.

A aplicabilidade da LPVC de primeira ordem a funções não lineares produz resultados adequados em cálculos geodésicos, desde que as observações possuam precisão suficiente (OGUNDARE, 2016; WYSZKOWSKA, 2017). A matriz Σ_i foi estruturada para acomodar as variâncias e as covariâncias cruzadas entre as componentes de cada ponto de apoio, o que é essencial em contextos nos quais as coordenadas provêm de ajustamentos de redes geodésicas, cujos softwares fornecem matrizes completas.

Por fim, cabe ressaltar que a magnitude das incertezas propagadas é diretamente

governada pelas sensibilidades geométricas de cada método. A configuração espacial dos pontos de apoio em relação ao VV atua como um fator de amplificação ou atenuação das incertezas de entrada, o que significa que determinadas geometrias de intersecção podem degradar severamente a precisão posicional final, mesmo partindo de observações de alta qualidade.

2.2 *Vértices Virtuais Toolbox:* Implementação da Ferramenta no QGIS

A escolha do QGIS como plataforma de hospedagem deve-se ao seu caráter livre e de código aberto e à sua capacidade de integrar cálculos geodésicos à visualização espacial. Essa abordagem busca centralizar o fluxo de trabalho em um único ambiente SIG, superando a fragmentação operacional de procedimentos cadastrais tradicionais que historicamente dependem da alternância entre softwares comerciais de processamento GNSS, programas de ajustamento independentes e planilhas eletrônicas externas para a propagação de variâncias (COELHO; CHAVES, 2015).

A arquitetura de cada algoritmo do *Vértices Virtuais Toolbox* segue o modelo do QGIS *Processing Framework*, com herança da classe base *QgsProcessingAlgorithm*. Essa abordagem foi documentada por Graser e Olaya (2015) como um paradigma eficaz para integração de ferramentas de geoprocessamento externas ao ambiente QGIS, permitindo execução tanto por interface gráfica interativa quanto de forma programática ou automatizada por modelos de fluxo de trabalho.

O modelo de dados adotado separa estruturalmente as informações geométricas dos atributos estocásticos: uma *Camada de Pontos* (a ferramenta calcula coordenadas e incertezas conforme referencial da camada de entrada, ou seja, sem realizar transformações internas de referencial ou projeção) armazena as coordenadas planimétricas e os desvios-padrão das coordenadas dos vértices de apoio, grandezas medidas em campo (ângulos, distâncias ou identificadores de pontos relacionados) e seus desvios-padrão são de entrada manual. Essa separação permite a reutilização dos pontos de apoio em múltiplos cálculos sem redundância de dados. A tabela 1 sintetiza os cinco métodos de posicionamento indireto implementados, suas variáveis de entrada características e os campos de saída gerados pela ferramenta.

Tabela 1 - Síntese dos algoritmos implementados no *Vértices Virtuais Toolbox*: método, variáveis de entrada e campos de saída

Método	Classe	Variáveis de entrada (observações)	Campos de saída adicionais
Interseção de Retas	intersecao_retas	4 Vértices definidores de duas retas; σ de cada vértice de apoio.	— (saída padrão)
Interseção Angular	intersecao_angular	2 Vértices, σ de cada vértice de apoio; 2 ângulos internos horizontais medidos (α, β) e seus σ angulares.	Ângulo de abertura γ
Interseção	intersecao_linear	2 Vértices, σ de cada vértice	Ângulo de

Linear		de apoio; 2 distâncias medidas (d1, d2) e seus σ.	abertura γ
Regra do Paralelogramo	regra_paralelogramo	3 Pontos (P1, P2, P3, vértices conhecidos do paralelogramo); σ de cada vértice de apoio.	— (saída padrão)
Vértices e Linhas Paralelas	linhas_paralelas	Vértices do eixo de referência; Linha do eixo de referência; distância de deslocamento lateral (d) e seus σ.	— (saída padrão)

Fonte: os autores (2026).

Em todos os algoritmos, as feições de saída recebem as coordenadas calculadas do VV (X_{P_I}, Y_{P_I}) e os desvios-padrão propagados nas componentes Este $\sigma_X P_I$ e Norte $(\sigma_Y P_I)$.

Para os métodos de Interseção Angular e Interseção Linear, calcula-se adicionalmente o ângulo de abertura γ entre as linhas de visada. Esse ângulo atua como um parâmetro influenciador direto na qualidade da interseção: valores de γ próximos a 90° denotam condições geométricas ideais, ao passo que ângulos próximos a 0° ou 180° configuram uma zona de instabilidade posicional. Essa configuração crítica é descrita na literatura clássica de topografia como uma situação de mau condicionamento geométrico (WOLF; GHILANI, 2012), comprometendo a precisão da coordenada calculada.

Como fechamento do ambiente de desenvolvimento e para garantir o caráter auditável e reprodutível da ferramenta, todos os cinco algoritmos descritos encontram-se completamente implementados e foram disponibilizados publicamente no repositório Figshare, acessível em: https://doi.org/10.6084/m9.figshare.32764899. Essa distribuição aberta visa disponibilizar a ferramenta desenvolvida e facilitar a integração imediata da solução aos fluxos de trabalho de profissionais e instituições que atuam no cadastro territorial brasileiro.

2.3 Metodologia de Teste Numérico e Validação

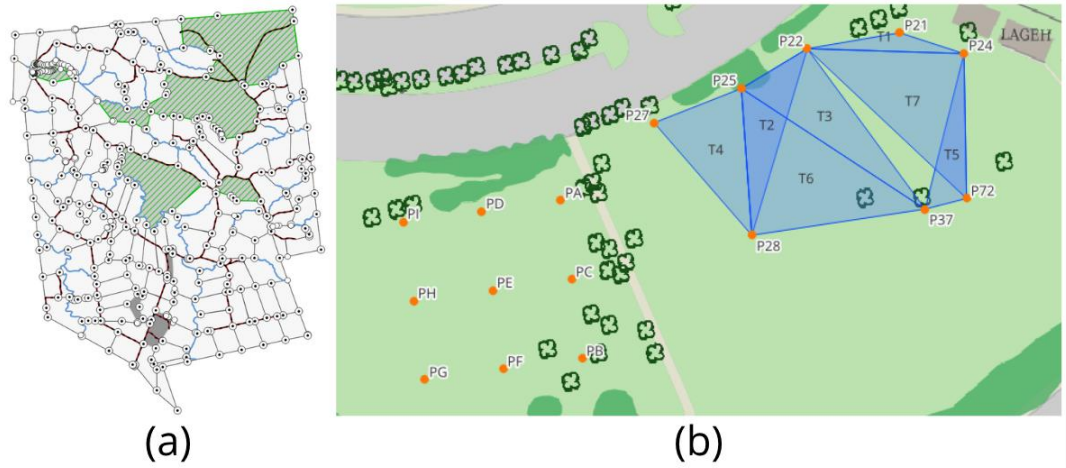
A validação dos algoritmos implementados foi realizada considerando dois aspectos: (i) validação com dados reais de campo; e (ii) verificação de conformidade normativa.

Para os métodos de Interseção de Retas e Paralela de Linhas, a validação utilizou informações provenientes do banco de dados do TED, referente ao Projeto de Assentamento (PA) Modelo. Foram selecionados casos de cadastro de estradas, nos quais as coordenadas dos vértices laterais ao eixo levantado precisam ser determinadas com precisão posicional condizente com aquela obtida de forma direta. Para o método de Interseção de Retas, selecionaram-se casos de fechamento de parcelas cujos vértices de limite situam-se na interseção geométrica de dois alinhamentos de divisa construídos por pontos cujas coordenadas foram determinadas de forma direta.

A configuração espacial da área de estudo correspondente ao PA Modelo é ilustrada na Figura 2, onde se destacam a malha viária e o delineamento das parcelas utilizadas como base para a validação. Para a condução dos ensaios controlados, a área de estudo abrangeu pontos

materializados no *campus* universitário. A Figura 2 (b) ilustra a disposição física e a distribuição geométrica dos marcos geodésicos empregados nas simulações. A configuração é composta por pontos pertencentes à rede (P21, P22, P24, P25, P27, P28, P37 e P72) e por pontos implantados especificamente para atender às condições de aplicação da regra do paralelogramo (PA a PI) conforme Figura 2 (a). O levantamento das coordenadas foi realizado via posicionamento RTX (*Real Time eXtended*), empregando-se o receptor GNSS Trimble R12i.

Figura 2 – (a) Malha viária e limites de parcelas do Projeto de Assentamento Modelo aplicados na validação; (b) Croqui de localização dos marcos da Rede Topográfica da UFPR e pontos regulares implantados, utilizados nos ensaios de simulação de VVs.



Fonte: os autores (2026).

Para avaliar os métodos de Interseção Angular e Linear, realizou-se uma campanha experimental de medição na Rede Topográfica da UFPR. Com base em vértices de coordenadas conhecidas, planejaram-se cenários para a determinação de VVs, explorando distintas geometrias do ângulo de interseção (γ) – fator determinante na propagação de incertezas (MARTINS et al., 2026). O algoritmo calcula as coordenadas e as incertezas (σ_N, σ_E) do ponto-alvo a partir dos vértices de apoio e dos dados de campo (medições angulares e distâncias). Nesta campanha específica, as precisões nominais do equipamento foram utilizadas como dados de entrada para a propagação, sem que isso reflita uma exigência intrínseca da ferramenta. A acurácia foi quantificada pela discrepância planimétrica entre o valor calculado e a coordenada de referência $RMSE = \sqrt{(E_{calc} - E_{ref})^2 + (N_{calc} - N_{ref})^2}$, em conformidade com os critérios da NTGIR 3.ª ed. (INCRA, 2013) e da NBR 17.047/2022 (ABNT, 2022).

A tabela 2 detalha as coordenadas UTM fuso 22S de referência, acompanhadas de suas respectivas incertezas e covariâncias entre as componentes planimétricas, no sistema geodésico Brasileiro.

Tabela 2 – Coordenadas UTM fuso 22S de referência, desvios-padrão planialtimétricos e covariâncias dos vértices de apoio da Rede Topográfica da UFPR, referenciadas ao sistema

geodésico brasileiro.

Ponto	N (m)	E (m)	σ_N (m)	σ_E (m)	σ_H (m)	$\mathbf{Cov}(E,N)$ (m^2)
P21	7184192,294	677839,336	0,011	0,009	0,014	0,000011
P24	7184187,074	677855,492	0,011	0,011	0,016	-0,000001
P72	7184150,715	677856,151	0,01	0,009	0,013	0,000013
P37	7184148,034	677845,74	0,012	0,011	0,016	0,000006
P28	7184141,465	677802,21	0,01	0,009	0,013	0,000004
P27	7184169,706	677777,653	0,042	0,048	0,064	0,000283
P25	7184178,312	677799,563	0,021	0,014	0,025	0,000021
P22	7184188,311	677816,131	0,008	0,008	0,011	0,000002
PA	7184150,183	677754,192	0,009	0,008	0,012	0,000003
PB	7184110,519	677759,554	0,010	0,009	0,013	0,000015
PC	7184130,362	677756,894	0,008	0,007	0,011	0,000002
PD	7184147,482	677734,353	0,008	0,007	0,011	0,000006
PE	7184127,652	677737,078	0,009	0,009	0,013	0,000009
PF	7184107,886	677739,714	0,011	0,010	0,015	0,000017
PG	7184105,201	677719,932	0,012	0,011	0,016	0,000036
PH	7184124,983	677717,253	0,012	0,012	0,017	0,000026
PI	7184144,792	677714,558	0,011	0,011	0,015	0,000001

Fonte: os autores (2026).

A tabela 3 descreve as combinações triangulares propostas para os ensaios, indicando os pontos de base, o ponto de interseção (P_I) e o respectivo ângulo de abertura (γ).

Tabela 3 - Configurações geométricas simuladas para as interseções (angulares e lineares) e seus respectivos ângulos de abertura (γ).

Triangulo	P_I	A	B	Ângulo γ (GMS)
T1	P21	P22	P24	152° 22' 53"
T2	P25	P22	P28	117° 09' 58"
T3	P22	P25	P37	95° 01' 53"
T4	P25	P28	P27	72° 47' 35"
T5	P72	P37	P24	103° 27' 56"
T6	P28	P25	P37	85° 32' 30"
T7	P24	P22	P72	92° 52' 30"

Fonte: os autores (2026).

Adicionalmente, para contemplar casos que dependam de comportamentos geométricos distintos como na Regra do Paralelogramo, foram estabelecidas as composições descritas na tabela 4.

Tabela 4 - Combinações de vértices de apoio aplicadas nas validações geométricas e testes de redundância posicional.

P_I	A	B	C
P28	P24	P72	P25
P24	P28	P72	P25
P22	P37	P24	P28

PE	PA	PC	PD
PH	PD	PE	PI
PF	PC	PB	PE
PG	PE	PF	PH
PH	PA	PC	PI
PG	PD	PF	PI
PI	PC	PD	PE
PG	PA	PB	PI
PE	PA	PC	PD

Fonte: os autores (2026).

A utilização de uma rede topográfica universitária com coordenadas obtidas via posicionamento GNSS como referência independente é reconhecida como prática adequada para avaliação de ferramentas de posicionamento geodésico (OGUNDARE, 2016).

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Método de Interseção de Retas

Os resultados a seguir demonstram o desempenho e as limitações operacionais dos cinco métodos de determinação de VVs, avaliados sob as dimensões do rigor estocástico e da sensibilidade geométrica.

Na validação do método de Interseção de Retas com dados reais provenientes do TED, foram analisados 158 vértices cujas coordenadas e precisões foram calculadas pela ferramenta. A tabela 5 detalha as estatísticas globais e a distribuição de frequências para avaliar as incertezas frente aos limites normativos.

Tabela 5 – (a) Estatísticas globais das incertezas planimétricas (σ_H) para os 158 vértices avaliados pelo método de Interseção de Retas; (b) Distribuição de frequências de σ_H por faixas de incerteza no método de Interseção de Retas.

(a)			**(b)**		
Medida	**σ_H (m)**	**Ângulo γ (°)**	**Faixa (m)**	**Quantidade**	**Percentual**
Mínimo	0,0002	0,0	**0 – 0,08**	96	60,8%
Máximo	38,13	89,9	**0,08 – 0,5**	32	20,3%
Média	1,17	55,2	**0,5 – 3,0**	21	13,3%
Mediana	0,044	60,1	**3,0 – 7,5**	5	3,2%
Desvio Padrão	3,03	20,3	**> 7,5**	4	2,4%

Fonte: os autores (2026).

A análise da incerteza horizontal propagada demonstra alta adequação normativa. Constatou-se que 60,8% dos vértices (96) apresentaram $\sigma_H \leq 0{,}08m$, atendendo aos rigorosos limites urbanos da ABNT NBR 17.047. Somando-se aos 20,3% situados na faixa seguinte (até 0,5 m), verifica-se que 81,1% da amostra cumpre a tolerância de 0,50 m estabelecida pela NTGIR para limites artificiais, com uma mediana global de 0,044 m.

Essa distribuição atesta a robustez do método. Os picos de incerteza extrema ($\sigma_H > 7{,}5$ m), que representam apenas 2,5% da amostra, ocorreram estritamente em ângulos de

interseção críticos (próximos a 0° ou 180°). Esse comportamento de degradação posicional é geometricamente previsto pela LPVC e confirma que a propagação reflete com fidelidade o mau condicionamento geométrico da rede.

3.2 Método Linhas Paralelas

Para o método de Linhas Paralelas, foram analisados 1.476 vértices reais do TED. As estatísticas sumarizadas na tabela 6 evidenciam uma alta amplitude nos desvios propagados para este método sob condições reais de levantamento.

Tabela 6 – (a) Estatísticas globais das incertezas planimétricas σ_H para os 1.476 vértices avaliados pelo método de Linhas Paralelas. (b) Distribuição de frequências de σ_H por faixas de incerteza no método de Linhas Paralelas.

(a)		**(b)**		
Medida	σ_H (m)	**Faixa (m)**	**Quantidade**	**Percentual**
Mínimo	0,011	**0 – 0,08**	220	7,4%
Máximo	7061,648	**0,08 – 0,5**	1334	45,1%
Média	7,500	**0,5 – 3,0**	1080	36,5%
Mediana	0,448	**3,0 – 7,5**	201	6,8%
Desvio Padrão	186,489	**> 7,5**	121	4,1%

Fonte: os autores (2026).

Apesar de 52,5% dos vértices cumprirem o limite rural da NTGIR (0,50 m) e 7,4% atingirem o limite urbano da NBR 17.047 ($\sigma_H \leq 0{,}08$ m), a alta amplitude do desvio-padrão global (186,48 m) exige atenção. Os casos de incerteza extrema representam 4,1% da amostra. Ao investigar a concentração desses erros, constatou-se que bases de referência curtas associadas à ocorrência de múltiplos ângulos superiores a 150° resultam em matrizes jacobianas mal condicionadas, gerando instabilidade numérica.

Por conseguinte, recomenda-se cautela na utilização prática deste método, devendo-se evitar configurações de vértices que se aproximem da colinearidade. No contexto das aplicações do TED, a adoção das Linhas Paralelas mostrou-se viável de forma segura apenas para a definição e não essenciais, como na escolha de vértices de eixo de estradas.

3.3 Métodos de Interseção Angular e Linear

A validação das interseções baseadas em ângulos e distâncias utilizou os triângulos simulados na rede topográfica. A Tabela 7 apresenta as incertezas propagadas e o erro planimétrico real (REQM) para estas injunções.

Tabela 7– (a) Incertezas propagadas e Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) calculados pelo método de Interseção Angular para os triângulos simulados. (b) Incertezas propagadas e erro planimétrico (REQM) calculados pelo método de Interseção Linear para os triângulos simulados.

		(a)				**(b)**			
Triangulo	P_I	$\sigma_{N_{P_I}}$	$\sigma_{E_{P_I}}$	$\sigma_{H_{P_I}}$	**REQM (mm)**	$\sigma_{N_{P_I}}$	$\sigma_{E_{P_I}}$	$\sigma_{H_{P_I}}$	**REQM (mm)**

		(mm)	(mm)	(mm)		(mm)	(mm)	(mm)	
T1	**P21**	7	8	11	33	29	7	30	13
T2	**P25**	7	7	10	55	10	11	15	53
T3	**P22**	19	15	24	57	14	15	21	42
T4	**P25**	41	48	63	78	11	52	53	74
T5	**P72**	11	10	15	11	11	12	16	19
T6	**P28**	17	16	23	48	21	12	24	51
T7	**P24**	9	8	12	21	10	8	13	17

Fonte: os autores (2026).

A NBR 17.047 adota um critério de tolerância posicional equivalente a três vezes a precisão normativa do vértice. Embasado nesse rigor, a confiabilidade do modelo estocástico implementado foi avaliada adotando-se o limite de tolerância estatística de 99,7%, verificado na prática pela relação REQM $\leq 3\sigma_H$, onde σ_H é a incerteza propagada pela ferramenta sendo a tolerância fixa e normativa ($3 \times 8cm = 24cm$) aplicável à discrepância entre dois levantamentos distintos. Todas as configurações atenderam a este critério, validando o rigor do modelo estocástico implementado.

Na validação do método de Interseção Angular, todos os cenários avaliados apresentaram REQM abaixo do limite normativo de 8 cm (80 mm) estabelecido pela NBR 17.047. Divergências pontuais entre o erro real e a incerteza teórica, mesmo sob geometrias favoráveis, indica a presença de erros sistemáticos residuais nas observações de campo ou pequenos vícios de centragem na materialização da rede de apoio. Tais vícios físicos não são capturados pela propagação puramente matemática da LPVC, ressaltando a importância do controle de qualidade em campo mesmo quando a geometria analítica da interseção aparenta ser ideal.

3.4 Regra do Paralelogramo

Por fim, o algoritmo referente à Regra do Paralelogramo foi validado processando-se composições de quatro pontos. A tabela 8 consolida o desempenho posicional e a propagação de erros para essas figuras.

Tabela 8 - Incertezas posicionais propagadas e erro planimétrico (REQM) calculados pelo método da Regra do Paralelogramo.

P_I	A	B	C	$\sigma_{H_{P_I}}$(mm)	**REQM (m)**
P28	P24	P72	P25	33	2,047
P24	P28	P72	P25	32	2,047
P22	P37	P24	P28	26	8,85
PE	PA	PC	PD	19	0,025
PH	PD	PE	PI	23	0,037
PF	PC	PB	PE	21	0,080
PG	PE	PF	PH	26	0,046
PH	PA	PC	PI	22	0,014
PG	PD	PF	PI	24	0,014

PI	PC	PD	PE	20	0,029
PG	PA	PB	PI	23	0,074
PE	PA	PC	PD	19	0,025

Fonte: os autores (2026).

Os ensaios com os pontos regularmente implantados para este fim (PA a PI) comprovaram a eficácia do método quando a premissa geométrica do paralelogramo é estritamente respeitada no terreno, resultando em erros (REQM) baixos, variando entre 14 e 80 mm.

Entretanto, ao aplicar o modelo em feições físicas assimétricas da rede (como a composição P28-P24-P22), observou-se uma desconexão crítica: as incertezas propagadas matematicamente pela LPVC mantiveram-se na ordem de milímetros (26 a 33 mm), mas os erros reais (REQM) saltaram para a casa dos metros (2,04 a 8,85 m). Isso gera um alerta operacional grave: a rigidez matemática do método funciona perfeitamente para validar a propagação em geometrias ideais, mas é capaz de mascarar erros posicionais severos se o quadrilátero não formar um paralelogramo fisicamente perfeito no terreno.

4 CONCLUSÕES

O desenvolvimento da ferramenta *Vértices Virtuais Toolbox* viabilizou a aplicação rigorosa da LPVC a cinco métodos de posicionamento indireto no cadastro nacional. Com exceção dos modelos teóricos de Martins *et al.* (2026), tais formulações são inéditas. A rigor, nenhum software comercial no Brasil executa essa análise estocástica, falhando em atender plenamente às normas técnicas para VVs rurais e urbanos. Assim, esta ferramenta se consolida como a primeira solução computacional capaz de suprir essa lacuna regulatória.

Os testes práticos ratificaram a conformidade majoritária da ferramenta aos padrões normativos para os cinco métodos. A Interseção de Retas (~81%) mostrou-se robusta. As Linhas Paralelas (~52,5%), contudo, exigem cautela por sua instabilidade numérica em geometrias desfavoráveis. Nas Interseções Angular e Linear, a propagação atingiu incertezas milimétricas e os valores de REQM validaram plenamente o modelo estocástico da LPVC, mantendo-se estritamente dentro do critério de $3\sigma_H$ em todos os triângulos avaliados. Em contrapartida, a Regra do Paralelogramo só se mostrou confiável em quadriláteros fisicamente regulares, visto que assimetrias mascaram erros métricos significativos sob baixas incertezas teóricas. Conclui-se que a acurácia final não depende apenas da qualidade estocástica, mas, decisivamente, do condicionamento geométrico e da correta materialização dos pontos em campo.

A implementação em ambiente aberto e o emprego de modelos estocásticos rigorosos, sem simplificações, asseguram a rastreabilidade das incertezas e conferem maior segurança jurídica ao georreferenciamento. Como trabalhos futuros, propõe-se um sistema de pré-análise geométrica para otimizar a distribuição dos pontos de apoio, considerando aspectos do relevo e do uso da terra.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 17047**: Levantamento cadastral territorial para registro público - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2022.

COELHO, L. A. N.; CHAVES, J. C. Precisão na determinação das coordenadas dos vértices de imóveis urbanos. **Revista Brasileira de Cartografia**, Rio de Janeiro, v. 67, n. 2, p. 287-305, mar./abr. 2015.

DARDANELLI, G.; MALTESE, A. On the Accuracy of Cadastral Marks: Statistical Analyses to Assess the Congruence among GNSS-Based Positioning and Official Maps. **Remote Sensing**, v. 14, n. 16, 4086, 2022.

GEMAEL, C.; MACHADO, A. M. L.; WANDRESEN, R. **Introdução ao ajustamento de observações**: aplicações geodésicas. 2. ed. Curitiba: Editora UFPR, 2016.

GHILANI, C. D. **Adjustment Computations**: Spatial Data Analysis. 6. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017.

GHILANI, C. D.; WOLF, P. R. **Elementary Surveying**: An Introduction to Geomatics. 13. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2012.

GONÇALVES, J. V. A.; RODRIGUES, L. P. V.; SANTOS, A. P. GeoPEC: um plugin do QGIS para o Controle de Qualidade Cartográfica. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS, 13., 2024, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2024.

GRASER, A.; OLAYA, V. Processing: A Python Framework for the Seamless Integration of Geoprocessing Tools in QGIS. **ISPRS International Journal of Geo-Information**, v. 4, n. 4, p. 2219–2245, 2015.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA. **Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais**. 3. ed. Brasília, DF: INCRA, 2013.

JEUDY, L. M. A. Generalyzed variance-covariance propagation law formulae and application to explicit least-squares adjustments. **Bulletin Géodésique**, v. 62, p. 113–124, 1988.

MAGRI MARTINS, E.; LIMA RODRIGUES, T.; KLEIN, I. Uncertainty propagation in the process of coordinates determination of Virtual or Inaccessible Survey Points. 2026. Preprint. doi:10.6084/m9.figshare.32817437.

MICHELS, N. B.; SILVA, R. M. da; SOUZA, S. F. de. Georreferenciamento de imóveis rurais: análise de área entre topografia, RTK e sistema TM. **Revista Brasileira de Geomática**, Curitiba, v. 9, n. 1, p. 62–84, 2021.

MIKHAIL, E. M.; ACKERMANN, F. **Observations and least squares**. Nova York: IEP-A Dun-Donnelley Publisher, 1976.

OGUNDARE, J. O. **Precision Surveying**: The Principles and Geomatics Practice. New Jersey: Wiley, 2016.

QGIS DEVELOPMENT TEAM. **QGIS Geographic Information System**. Open Source Geospatial Foundation Project, 2026. Disponível em: https://qgis.org. Acesso em: 19 jun. 2026.

ROSALEN, D. L.; MUNHOZ, J. V. C.; MARDEGAN, C. O georreferenciamento de imóveis rurais no município de Jaboticabal-SP. **Revista Ciência em Extensão**, v. 8, n. 3, p. 42–55, 2012.

SANTOS, E.; RODRIGUES, R. A. da S.; CORRÊA, R. I. L. A importância do georreferenciamento de imóveis rurais e sua certificação. **Revista Paramétrica**, v. 16, n. 1, p.

1–13, 2024.

SILVANO, T. P.; BARROS, E.; VASCONCELOS, E.; PÉRICLES, L.; FRANÇA, L. GeoINCRA: plugin do QGIS para georreferenciamento de imóveis rurais. In: CONGRESSO DE CADASTRO MULTIFINALITÁRIO E GESTÃO TERRITORIAL (COBRAC), 15., 2022, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 2022.

TOLEDO, B. H. C.; BERTOTTI, L. G. Breve histórico da certificação de imóveis rurais no Brasil e apresentação do Sistema de Gestão Fundiária - SIGEF. **Ambiência**, Guarapuava, v. 10, n. 3, p. 839–847, 2014.

WYSZKOWSKA, P. The Accuracy of the Law of Variance-Covariance Propagation in Geodetic Applications. **Reports on Geodesy and Geoinformatics**, v. 103, p. 53–62, 2017.