

## OBTENÇÃO DA ELIPSE DE ERROS NUM VÉRTICE DA POLIGONAL DE APOIO

SANTOS, Leonildo dos ; ITAME, Otávio Yassuo

UNESP - Faculdade de Ciências e Tecnologia - Departamento de Cartografia  
Rua Roberto Simonsen, 305 - Centro Educacional - C.P. 957  
19060 - 900 - PRESIDENTE PRUDENTE - SP  
Telefone : (018)221-5388 Ramal 201 - FAX : (018)223- 2227 - E\_mail : ueppr@eu.ansp.br

### RESUMO

O trabalho visa obter a elipse de erros de um vértice qualquer da poligonal de apoio, na implantação de uma base cartográfica aplicada ao Cadastro Técnico Multifinalitário. Partê-se do Erro Médio Quadrático (EMQ) dos instrumentos de medição angular e linear empregados e, pela lei de propagação dos erros das medidas de ângulos e distâncias, determina-se a matriz Variância-Covariância (MVC) do vértice  $n$  da poligonal, de coordenadas bidimensionais (E, N), para depois obter-se a elipse de erros: cujo centro tem por coordenadas as componentes E e N do vértice  $n$ ; cujo semi-eixos são dados pela raiz quadrada dos auto-valores da MVC do vértice  $n$ , multiplicada por  $\sigma_0$  e cuja orientação dos semi-eixos é dada pelos auto-vetores da mesma matriz. Obtida a elipse de erros do vértice  $n$  da poligonal, verifica-se facilmente se a precisão desejada naquele ponto foi atingida ou não. Uma decisão de substituir o teodolito, o distanciômetro ou todo o par, pode ser tomada com maior segurança pela comparação pura e simples das diferentes elipses de erros obtidas. Tal procedimento dispensa a realização de exaustivos testes de campo, com os diferentes instrumentos, na tentativa da escolha do par ideal.

**Palavras chave :** Elipse de erros

### ABSTRACT

The objective of this paper is to obtain the ellipse of the errors from any point of the polygonal applied in Multiuses Cadaster. Starting from the Standard Deviation of the instruments used for angular and linear determinations and, employing the errors propagation law of the angles and distances measurement, the Variance-Covariance Matrix (VCM) of the pont  $n$  of the polygonal, with (E, N) bidimensional coordinates, is estimated. Following, is obtained the ellipse of errors with this characteristics: the center has the component E and N of the point  $n$  as coordinates; the semi-axis are calculated by the square root of the auto-values of the VCM from  $n$  point ( $\sum_Y$ ) multiplied by  $\sigma_0$  and the semi-axis orientation is given by the auto-vectors of the same matrix. After the ellipse of errors, of the polygonal  $n$  point is obtained, the desired precision in this point can be easily verified if it was reached or not. The decision to substitute the Theodolite, the distance measurer or the whole pair, can be taken with accuracy, comparing the different ellipses of errors. This procedure avoid the realization of exaust field tests with different instruments, when trying chosing the ideal pair.

**Keywords:** Ellipse of the errors

## 1. INTRODUÇÃO

A obtenção da elipse de erros em um vértice qualquer da poligonal de apoio, usada para a implantação de uma base cartográfica aplicada ao Cadastro Técnico Multifinalitário, passa pela determinação da Matriz Variância-Covariância (MVC) desse vértice da poligonal, através da propagação de erros.

Parte-se do Erro Médio Quadrático (EMQ) dos instrumentos de medição angular e linear, propaga-se os erros cometidos nas medidas dos ângulos deflexões e das distâncias (duas fontes de erros), determina-se a MVC do vértice  $n$  da poligonal, de coordenadas (E,N) para posterior obtenção dos semi-eixos e da orientação da elipse de erros, que está centrada neste vértice.

## 2. DESENVOLVIMENTO

### 2.1. Determinação da MVC do vértice $n$ da poligonal

Para se chegar às coordenadas bidimensionais (E, N) de um vértice qualquer de uma poligonal de apoio, usa-se o modelo matemático seguinte:

$$E_n = \sum_{i=1}^n \ell_i \operatorname{sen} \theta_i$$

$$N_n = \sum_{i=1}^n \ell_i \operatorname{cos} \theta_i$$

A matriz  $\sum_{E_n} = \sum_Y$ , MVC do vértice de ordem  $n$  a determinar tem o seguinte aspecto:

$$\sum_Y = \begin{vmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 \end{vmatrix}$$

Como o modelo matemático apresentado é não linear, tem-se que linearizá-lo:

$$Y = F(X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0} (X - X_0)$$

Aplicando a lei de propagação da variância-covariância,  $\sum_Y$  fica determinada por :

$$\sum_Y = D \sum_X D^T$$

Sendo:  $D$  - matriz das derivadas parciais

$\sum_X$  - MVC das observações.

$$D_{(2 \times 2n)} = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial E}{\partial l_n} & \frac{\partial E}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial E}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial N}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial N}{\partial l_n} & \frac{\partial N}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial N}{\partial \theta_n} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_{x(2n \times 2n)} = \begin{vmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \dots & \sigma_{l_1 l_n} \sigma_{l_1 \theta_1} & \dots & \sigma_{l_1 \theta_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{l_n l_1} & \dots & \sigma_{l_n}^2 \sigma_{l_n \theta_1} & \dots & \sigma_{l_n \theta_n} \\ \sigma_{\theta_1 l_1} & \dots & \sigma_{\theta_1 l_n} \sigma_{\theta_1}^2 & \dots & \sigma_{\theta_1 \theta_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\theta_n l_1} & \dots & \sigma_{\theta_n l_n} \sigma_{\theta_n \theta_1} & \dots & \sigma_{\theta_n}^2 \end{vmatrix}$$

Como numa poligonal são medidas as deflexões ( $\alpha_i$ ) e não os azimutes ( $\theta_i$ ), pressupõe-se outra propagação, ou seja:

$$\Sigma_{\theta} = G \Sigma_{\alpha} G^T$$

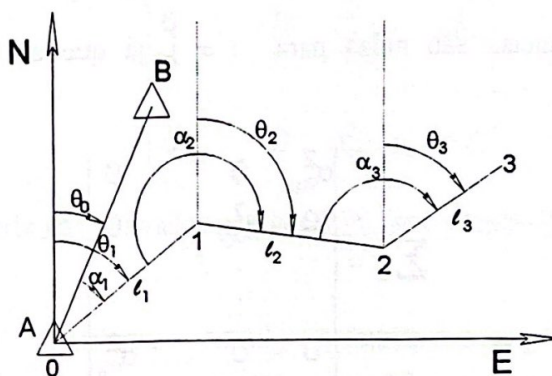


Fig. 1 - Poligonal

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a_1 + \theta_0 \\ \theta_2 &= a_1 + a_2 + \theta_0 - 1 \times 180^\circ \\ \theta_3 &= a_1 + a_2 + a_3 + \theta_0 - 2 \times 180^\circ \\ &\dots \\ \theta_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + \theta_0 - (n-1) \times 180^\circ \end{aligned}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta_0 \\ \theta_0 - 1 \times 180^\circ \\ \theta_0 - 2 \times 180^\circ \\ \vdots \\ \theta_0 - (n-1) \times 180^\circ \end{vmatrix}$$

$$\theta_{(nx1)} = G_{(nxn)} \times \alpha_{(nx1)} + C_{(nx1)}$$

Pela lei de propagação da variância-covariância, para  $Y = GX + C$ , obtém-se:

$$\Sigma_Y = G \Sigma_X G^T$$

O que leva a escrever:

$$\Sigma_\theta = G \Sigma_\alpha G^T$$

Para a matriz  $\Sigma_\alpha$ , tem-se :

$$\Sigma_\alpha = \begin{vmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1\alpha_2} & \dots & \sigma_{\alpha_1\alpha_n} \\ \sigma_{\alpha_2\alpha_1} & \sigma_{\alpha_2}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_2\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\alpha_n\alpha_1} & \sigma_{\alpha_n\alpha_2} & \dots & \sigma_{\alpha_n}^2 \end{vmatrix}$$

Onde as covariâncias são nulas para  $i \neq j$ , já que as observações angulares são independentes entre si.

Assim,  $\Sigma_\alpha$  fica:

$$\Sigma_\alpha = \begin{vmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\alpha_n}^2 \end{vmatrix}$$

Efetuando-se o produto :

$$\Sigma_\theta = G \Sigma_\alpha G^T$$

obtem-se :

$$\Sigma_\theta = \begin{vmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_1}^2 \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & (\sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2) & \dots & (\sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & (\sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2) & \dots & (\sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \dots + \sigma_{\alpha_n}^2) \end{vmatrix}$$

Realizando as observações angulares com o mesmo tipo de instrumento e mesmo número de séries, pode-se admitir variâncias iguais para todos os ângulos observados. Logo, tem-se:

$$\sigma_{\alpha_1}^2 = \sigma_{\alpha_2}^2 = \dots = \sigma_{\alpha_n}^2 = \sigma_\alpha^2$$

Então a matriz  $\Sigma_\theta$ , passa a ser reescrita assim:

$$\Sigma_\theta = \begin{vmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & 2\sigma_\alpha^2 & \dots & 2\sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & 2\sigma_\alpha^2 & \dots & n\sigma_\alpha^2 \end{vmatrix}$$

Para o cálculo das variâncias  $\sigma_{l_i}^2$ , existe uma parte fixa e outra variável com a distância ( $\sigma_1 \pm \text{ppm}$ ), ambas fornecidas pelo fabricante do medidor de distâncias, o que faz elas ficarem diferentes entre si.

$$\sigma_{l_1}^2 \neq \sigma_{l_2}^2 \neq \dots \neq \sigma_{l_n}^2$$

Voltando à matriz  $\Sigma_x$ , passa-se a escrevê-la novamente como:

$$\Sigma_x = \begin{vmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{l_n}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_\alpha^2 & \dots & n\sigma_\alpha^2 \end{vmatrix}$$

Falta apenas a matriz das derivadas parciais (D), para chegar-se à MVC do vértice  $n$  da poligonal ( $\Sigma_Y$ ).

$$(2 \times 2n) = \begin{vmatrix} \text{sen} \theta_1 & \dots & \text{sen} \theta_n & l_1 \cos \theta_1 & \dots & l_n \cos \theta_n \\ \cos \theta_1 & \dots & \cos \theta_n & -l_1 \text{sen} \theta_1 & \dots & -l_n \text{sen} \theta_n \end{vmatrix}$$

De posse da matriz D e da matriz  $\Sigma_x$ , ambas acima representadas, efetua-se o produto:

$$\Sigma_Y = D \Sigma_x D^T$$

e determina-se finalmente a matriz Variância-Covariância do vértice  $n$  da poligonal:

$$\Sigma_Y = \begin{vmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 \end{vmatrix} \quad \text{onde:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_{l_i}^2 \text{sen}^2 \theta_i + \sigma_\alpha^2 l_1 \cos \theta_1 \sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i + \\ &+ \sigma_\alpha^2 l_2 \cos \theta_2 \left( l_1 \cos \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n l_i \cos \theta_i \right) + \\ &+ \sigma_\alpha^2 l_3 \cos \theta_3 \left( l_1 \cos \theta_1 + 2 l_2 \cos \theta_2 + 3 \sum_{i=3}^n l_i \cos \theta_i \right) + \dots \\ &\dots + \sigma_\alpha^2 l_n \cos \theta_n \left( l_1 \cos \theta_1 + 2 l_2 \cos \theta_2 + \dots + n l_n \cos \theta_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{EN} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_{\ell_i}^2 \sin 2\theta_i - \sigma_{\alpha}^2 \ell_1 \cos \theta_1 \sum_{i=1}^n \ell_i \sin \theta_i + \\ & - \sigma_{\alpha}^2 \ell_2 \cos \theta_2 \left( \ell_1 \sin \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n \ell_i \sin \theta_i \right) + \\ & - \sigma_{\alpha}^2 \ell_3 \cos \theta_3 \left( \ell_1 \sin \theta_1 + 2 \ell_2 \sin \theta_2 + 3 \sum_{i=3}^n \ell_i \sin \theta_i \right) + \dots \\ & \dots - \sigma_{\alpha}^2 \ell_n \cos \theta_n (\ell_1 \sin \theta_1 + 2 \ell_2 \sin \theta_2 + \dots + n \ell_n \sin \theta_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{NE} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_{\ell_i}^2 \sin 2\theta_i - \sigma_{\alpha}^2 \ell_1 \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n \ell_i \cos \theta_i + \\ & - \sigma_{\alpha}^2 \ell_2 \sin \theta_2 \left( \ell_1 \cos \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n \ell_i \cos \theta_i \right) + \\ & - \sigma_{\alpha}^2 \ell_3 \sin \theta_3 \left( \ell_1 \cos \theta_1 + 2 \ell_2 \cos \theta_2 + 3 \sum_{i=3}^n \ell_i \cos \theta_i \right) + \dots \\ & \dots - \sigma_{\alpha}^2 \ell_n \sin \theta_n (\ell_1 \cos \theta_1 + 2 \ell_2 \cos \theta_2 + \dots + n \ell_n \cos \theta_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 = & \sum_{i=1}^n \sigma_{\ell_i}^2 \cos^2 \theta_i + \sigma_{\alpha}^2 \ell_1 \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n \ell_i \sin \theta_i + \\ & + \sigma_{\alpha}^2 \ell_2 \sin \theta_2 \left( \ell_1 \sin \theta_1 + 2 \sum_{i=2}^n \ell_i \sin \theta_i \right) + \\ & + \sigma_{\alpha}^2 \ell_3 \sin \theta_3 \left( \ell_1 \sin \theta_1 + 2 \ell_2 \sin \theta_2 + 3 \sum_{i=3}^n \ell_i \sin \theta_i \right) + \dots \\ & \dots + \sigma_{\alpha}^2 \ell_n \sin \theta_n (\ell_1 \sin \theta_1 + 2 \ell_2 \sin \theta_2 + \dots + n \ell_n \sin \theta_n) \end{aligned}$$

## 2.2. Obtenção da Elipse de Erros

Considera-se a variância da unidade de peso  $\sigma_0^2$  como tendo o valor unitário. Desta maneira ao invés de se trabalhar com a matriz dos coeficientes de peso  $Q_Y$ , trabalha-se direto com a MVC do vértice  $n$  da poligonal ( $\Sigma_Y$ ), uma vez que  $Q_Y = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_Y$ .

Tome-se um vetor bidimensional  $Y$ , de componentes  $E$  e  $N$ . Imprimindo ao sistema uma rotação, fica-se com :

$$U = G Y, \text{ sendo } U = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} \text{ e } G = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

onde  $G$  é a matriz de rotação e  $(a, b)$  e  $(a', b')$  representam os cossenos diretores dos novos eixos em relação aos antigos.

A MVC do vetor U, simbolizada por  $\Sigma_U$ , pode ser calculada em função da MVC do vetor Y, denotada por  $\Sigma_Y$ . Pela lei de propagação das variâncias-covariâncias:

$$\Sigma_U = D \Sigma_Y D^T$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta E} & \frac{\delta u}{\delta N} \\ \frac{\delta v}{\delta E} & \frac{\delta v}{\delta N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = G$$

$$\Sigma_Y = \begin{vmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 \end{vmatrix}$$

Efetua-se o produto  $\Sigma_U = D \Sigma_Y D^T$  e obtém-se :

$$\sigma_U^2 = a^2 \sigma_E^2 + b^2 \sigma_N^2 + 2ab \sigma_{EN}$$

Verifica-se que  $\sigma_U^2$  depende dos cossenos diretores a e b que dão a orientação dos novos eixos em relação aos antigos.

Definindo uma função  $\phi$ , tal que :

$$\phi = \sigma_U^2 - \lambda(a^2 + b^2 - 1)$$

Tomando  $\lambda$  como multiplicador de Lagrange, para  $\phi_{\max}$ , tem-se

$$\frac{\delta \phi}{\delta a} = a \sigma_E^2 + b \sigma_{EN} - \lambda a = 0$$

$$\frac{\delta \phi}{\delta b} = a \sigma_{NE} + b \sigma_N^2 - \lambda b = 0$$

$$(\sigma_E^2 - \lambda)a + \sigma_{EN}b = 0$$

$$\sigma_{NE}a + (\sigma_N^2 - \lambda)b = 0$$

Este sistema admitirá solução diferente da trivial (0,0), se e somente se for nulo o determinante.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (\sigma_E^2 - \lambda) & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & (\sigma_N^2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Ou  $\text{Det} |\Sigma_Y - \lambda| = 0$  que é a equação característica da matriz, no caso, MVC do vértice n da poligonal, cujas duas raízes reais fornecem os auto-valores da MVC.

O maior valor de  $\lambda$ , da equação característica, será igual ao  $\max \sigma_u$ , semi-eixo maior da elipse correspondendo a ele um auto-vetor cujas componentes de seu vetor unitário, representam os cossenos diretores a e b que dão a orientação do eixo maior da elipse de erros em relação aos eixos E e N.

Ao outro auto-valor de  $\Sigma_Y$ , que é igual ao  $\max \sigma_v$ , semi-eixo menor da elipse, corresponde também outro auto-vetor cujas componentes de seu unitário ( $a', b'$ ), darão a orientação do outro eixo da elipse, formando com o primeiro um par ortogonal.

Assim estará definida a elipse :

1. Cujos centro tem por coordenadas as componentes E e N do vértice  $n$  ;
2. Cujos semi-eixos são dados pela raiz quadrada dos auto-valores da MVC do vértice  $n$  ( $\Sigma_Y$ ) multiplicada por  $\sigma_0$ ;
3. Cujas orientação dos semi-eixos é dada pelos auto-vetores da mesma matriz.

Então:

$$\text{Det} | \Sigma_Y - \lambda I | = 0$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

$$a_1 = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1}$$

$$a_2 = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2}$$

$a_1$  e  $a_2$ : semi-eixos da elipse de erros.

Os auto-vetores são soluções do sistema:

$$(\sigma_E^2 - \lambda)w_1 + \sigma_{EN}w_2 = 0$$

$$\sigma_{NE}w_1 + \sigma_N^2w_2 = 0$$

### 3. CONCLUSÃO

Com a obtenção da elipse de erros resultante no vértice de ordem  $n$  da poligonal de apoio, na implantação de uma base cartográfica aplicada ao Cadastro Técnico Multifinalitário, torna-se mais fácil, mediante uma análise de seus dois semi-eixos, avaliar a precisão relativa do vértice em questão.

Quando a precisão desejada não tiver sido atingida com um determinado par de instrumentos (teodolito e distanciômetro), uma decisão de substituir somente o instrumento de medição angular ou todo o par, pode ser tomada com a maior segurança, visto que uma nova elipse de erros passaria a ser obtida.

Pela comparação pura e simples das diferentes elipses de erros resultantes, faz-se a melhor escolha do par de instrumentos que melhor atenda à precisão exigida. Tal procedimento dispensa a realização de exaustivos testes no campo, com os diferentes pares de instrumentos, na tentativa de se escolher o par ideal.

#### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ESPARTEL, Lélis. Curso de Topografia. 5ª Edição. Porto Alegre-RS, 1977.

ESTADO-MAIOR DO EXÉRCITO. Manual Técnico T34-401-Poligonação Eletrônica. 1ª Edição. Brasília- DF, 1976.

GEMAEL, Camil. Introdução ao Ajustamento de Observações. 1ª Edição. UFPR, Curitiba - PR, 1994.

LANG, Serge. Álgebra Linear. 4ª Edição. São Paulo-SP, 1977.

MEYER, Paul L. Probabilidade Aplicada à Estatística. 1ª Edição. Rio de Janeiro - RJ, 1969.