

## Comparação entre Métodos de Levantamentos Micro-Geodésicos por Triangulação, Poligonação, Trilateração e Trianglateralção

OLIVEIRA, Marcelo Tuler; MACEDO, Fabio Campos

Universidade Federal do Paraná. Departamento de Geociências.  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas - Caixa Postal 19.011.81531.990  
Curitiba - PR. Fone: (041) 366-2323 - Ramal 3258.  
E-mail: tuler@alhidade.geoc.ufpr.br  
fabiocm@alhidade.geoc.ufpr.br

### ABSTRACT

This work propose a comparative study between micro-geodetic survey methods, such as Triangulation, Poligonation, Trilateration and Trianglateralation, in a small and relatively plane area, analyzing from a local and fixed coordinate and an arbitrary orientation the determination of the local coordinates of the rest of the points materialized in the terrain. The calculations of the vertex coordinates, adjustment with their respective standard deviations and ellipse errors were evaluated by TAGNET program (Silva, 1994).

**Keywords:** Survey, Adjustment.

### RESUMO

Este trabalho propõe um estudo comparativo entre os métodos de levantamento micro-geodésicos por Triangulação, Poligonação, Trilateração e Trianglateralção numa área pequena e relativamente plana, analisando a partir de uma coordenada local e fixa, e uma orientação arbitrária, a determinação das coordenadas locais dos demais pontos materializados no terreno. O cálculo das coordenadas dos vértices, ajustamento com seus respectivos desvios padrão e elipses de erros, foram avaliados pelo programa TAGNET (SILVA, 1994).

**Palavras chave:** Levantamentos, Ajustamento.

## 1. INTRODUÇÃO

Avançado aos propósitos fundamentais da Geodésia em apenas determinar a forma e dimensões de nosso planeta, aplicações locais desta ciência constantemente são requeridas, podendo citar o suporte às tarefas cartográficas de mapeamento e cadastro, o acompanhamento preciso de grandes projetos de engenharia, etc.

Para isto, utiliza-se de métodos de levantamento, onde através de técnicas e instrumentos, lança-se numa região um arcabouço de pontos fundamentais materializados no terreno, cujas coordenadas geodésicas devem ser conhecidas.

Tendo em vista a realização de obras de grande porte, e uma real necessidade de controle destes projetos em áreas relativamente pequenas, os métodos de levantamento foram incrementados por processos sofisticados de cálculo, baseando-se no ajustamento de observações; e por evoluções instrumentais, podendo citar os distânciômetros incorporados aos teodolitos eletrônicos (Estações Totais), ou a utilização do Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Desta evolução, alguns termos surgiram como "*Levantamentos Micro-Geodésicos*", "*Topografia Industrial*", "*Levantamentos Especiais*" ou "*Topografia de Precisão*", referindo-

se aos levantamentos convencionais da Topografia e Geodésia, porém com relevância à precisão das observações.

Neste trabalho, para levantamento dos dados (ângulos e distâncias), seguiu-se as Especificações e Normas Gerais para Execução de Levantamentos Geodésicos, propostas pelo IBGE (IBGE, 1983).

## 2. TRIANGULAÇÃO MICRO-GEODÉSICA

O processo de levantamento planimétrico por Triangulação é o mais antigo e utilizado, sendo ainda hoje o mais recomendado diante ao baixo investimento instrumental e equipamentos auxiliares, possuindo uma precisão considerável.

Este consiste numa rede de triângulos que cobrem a área a ser levantada, cujos vértices estão convenientemente materializados no terreno, baseando-se no teorema em que “... tendo-se um lado do triângulo e os ângulos a ele adjacentes, obtêm-se os outros elementos.”. Porém, sabe-se que em geodésia medem-se todos os ângulos do triângulo, em virtude do mesmo não ser um triângulo plano e sim elipsóidico, obtendo-se ao final um excesso esférico. Embora exista o efeito da curvatura da terra sobre as observações, nesse trabalho considerou-se que o terreno foi materializado sobre o plano, em razão da pequena distância entre os vértices ocupados, desprezando assim o excesso esférico. Apesar desta imposição, determinou-se os três ângulos do triângulo para um perfeito ajustamento das observações.

Uma das principais aplicações micro-geodésicas do método de levantamento por Triangulação é a ampliação de uma base, ou seja, determinar a distância entre dois pontos 1-3, a partir de uma base 2-4, e dos ângulos formados pelas direções (Figura 1). Partindo desse exercício, materializou-se uma pequena rede de pontos no terreno, na qual foi o objeto de estudo para todos o outros métodos de levantamentos considerados nessa comparação.

### 2.1. Procedimento de Campo e Resultados

Para implantação da base e dos vértices da Triangulação foi elaborado um anteprojeto considerando a melhor configuração dos triângulos e as construções nas imediações.

Na materialização da base, escolheu-se um alinhamento retilíneo, em local de terreno plano, e as extremidade intervisíveis entre si e com os vértices. Foi executado uma medição inclinada direta com fita de aço em dois sentidos (ida e volta - 2 repetições) e nivelamento geodésico dos marcos para redução de distâncias. Na medição dos ângulos utilizou-se o método das direções (IBGE, 1983), com 4 séries de observações e teodolito de precisão de 1” (Figura 1). Nas Tabelas 1 e 2 tem-se os dados de entrada e saída manipulados pelo “software” TAGNET (Silva, 1994).

TABELA 1 : Dados de Entrada

Número de Estações	Número de incógnitas	Núm. de observações				
		Ângulos	Distância	Azimuthes	Posições	Total
4	8	8	1	1	2	12

TABELA 2 : Dados de Saída

Est	Coord. Ajustadas		Desvio Padrão		Elipse de Erros		
	Norte (m)	Este (m)	Norte (mm)	Este (mm)	Max. (mm)	Min. (mm)	Az. do eixo maior (grau)
1	1000,000	1000,000	0,0	0,0	0,0	0,0	círculo
2	1106,463	1106,463	1,6	1,6	2,3	0,0	45
3	1137,431	1221,772	2,2	2,9	3,6	0,7	53
4	1031,523	1199,455	1,3	2,7	2,9	0,9	70

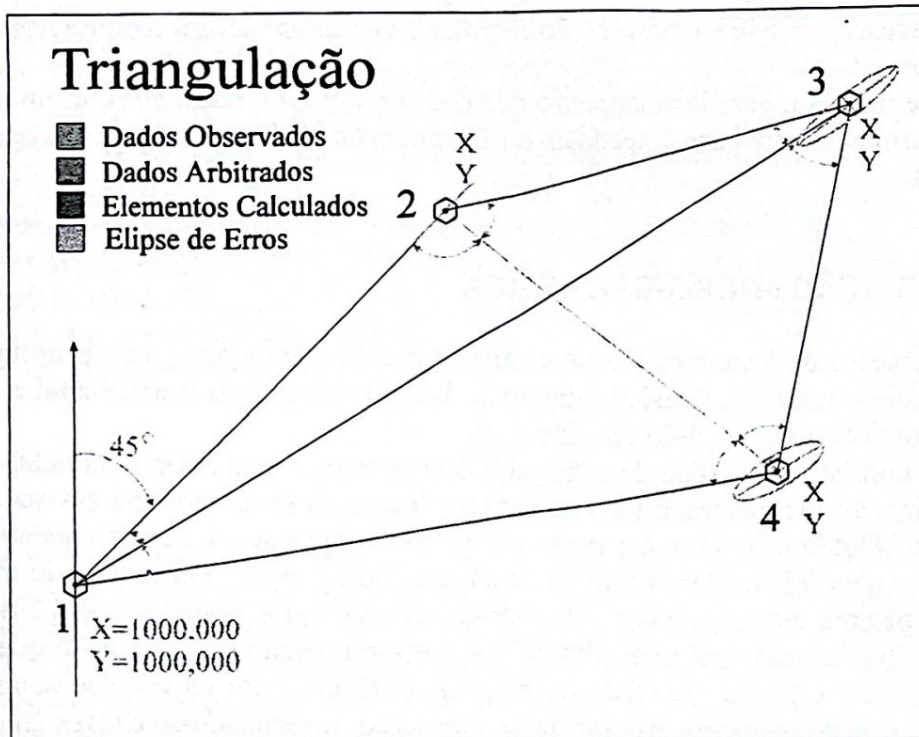


FIGURA 1 : Método de levantamento por Triangulação.

### 3. POLIGONAÇÃO MICRO-GEODÉSICA

O método de levantamento por Poligonação ou Caminhamento consiste em ligar consecutivamente, dois a dois, uma série de pontos a levantar, formando uma linha poligonal que o operador percorre inteiramente, medindo os ângulos e as extensões de todos os seus lados.

Trata-se de um método rápido e conveniente, sobretudo quando o terreno tem intervisibilidade restrita entre seus pontos devido a acidentes naturais ou construções, podendo vir a substituir a Triangulação sob algumas precauções.

Quanto ao seu controle, as poligonais podem ser classificadas em fechadas e abertas. Define-se como aberta, aquela em que os últimos vértices não estão amarrados a um ponto de coordenadas conhecidas; e fechada, aquela que partem de um vértice e chegam a ele mesmo ("loop"), ou partem de um vértice de coordenadas conhecidas e chegam a outro vértice também de coordenadas conhecidas. Nesse trabalho trata-se de uma poligonal em "loop".

#### 3.1. Procedimento de Campo e Resultados

Para medição das distâncias, utilizou um instrumento de medição eletrônica com precisão de 5mm + 2ppm. Estas medidas foram tomadas como inclinadas, necessitando dos ângulos verticais para redução ao plano. Na medição dos ângulos horários, aplicou-se o método das direções com 4 séries e teodolito de precisão de 1" (Tabelas 3 e 4) (Figura 2).

TABELA 3 : Dados de Entrada

Número de Estações	Número de incógnitas	Núm. de observações				
		Ângulos	Distância	Azimutes	Posições	Total
4	8	4	4	1	2	11

TABELA 4 : Dados de Saída

Est	Coord. Ajustadas		Desvio Padrão		Elipse de Erros		
	Norte (m)	Este (m)	Norte (mm)	Este (mm)	Max. (mm)	Min. (mm)	Az. do eixo maior (grau)
1	1000,000	1000,000	0,0	0,0	0,0	0,0	círculo
2	1106,460	1106,460	2,9	2,9	4,1	0,0	45
3	1137,430	1221,770	3,3	3,8	3,9	3,3	76
4	1031,527	1199,457	3,2	3,3	3,7	2,7	49

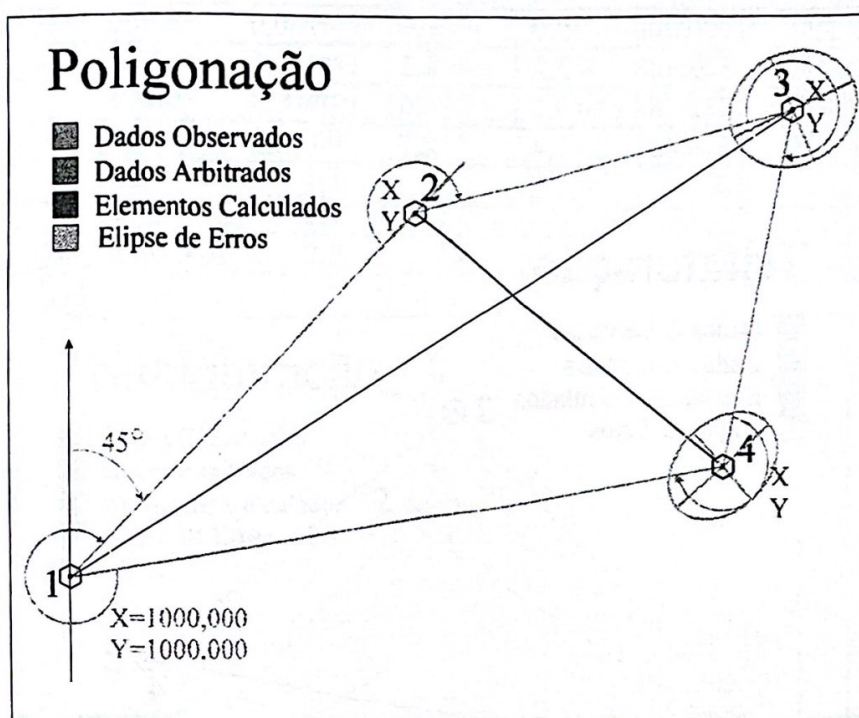


FIGURA 2 : Método de levantamento por Poligonação.

#### 4. TRILATERAÇÃO MICRO-GEODÉSICA

O levantamento por Trilateração consiste na medida dos três lados de um triângulo. Com o avanço dos métodos de medição indireta de distâncias, o método de Trilateração se fez presente como um processo rápido, e com a vantagem de eliminar acúmulos de erros angulares. Embora tenha esta vantagem, conforme comprovado neste trabalho, sob condições particulares, não pode-se aceitar que este método substitua a Triangulação ou a Poligonação (Item 6).

O uso do método por Trilateração é mais indicado em casos onde a medição angular é impossibilitada ou em determinadas situações táticas. Com relação ao seu emprego, pode-se dizer que esta surge como um método auxiliar à Triangulação, com objetivo de obter maior quantidade de observações para uma otimização no ajustamento.

##### 4.1. Procedimento de Campo e Resultados

Para medição das distâncias, utilizou um instrumento de medição eletrônica com precisão de 5mm + 2ppm. Igualmente às observações da Poligonação, estas também são tomadas como inclinadas, necessitando do ângulos verticais para redução ao plano. Aqui deve ficar claro a influência do ângulo vertical, limitando a precisão da Trilateração, principalmente se considerarmos grandes distâncias entre os vértices (Tabelas 5 e 6). (Figura 3).

TABELA 5 : Dados de Entrada

Número de Estações	Número de incógnitas	Núm. de observações				Total
		Ângulos	Distância	Azimutes	Posições	
4	8	0	6	1	2	9

TABELA 6 : Dados de Saída

Est	Coord. Ajustadas		Desvio Padrão		Elipse de Erros		
	Norte (m)	Este (m)	Norte (mm)	Este (mm)	Max. (mm)	Min. (mm)	Az. do eixo maior (grau)
1	1000,000	1000,000	0,0	0,0	0,0	0,0	círculo
2	1106,468	1106,468	2,2	2,2	3,1	0,0	45
3	1137,433	1221,783	5,1	4,6	6,2	2,9	140
4	1031,528	1199,461	3,4	2,7	4,3	0,3	38

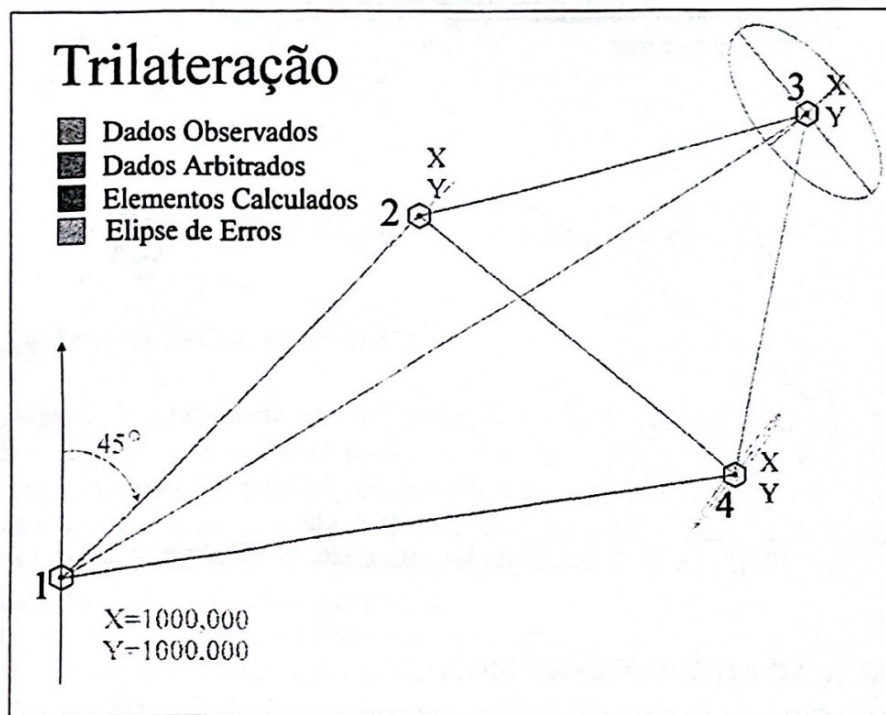


FIGURA 3 : Método de levantamento por Trilateração.

## 5. TRIANLATERAÇÃO MICRO-GEODÉSICA

O método de levantamento por Trianlateralção consiste na medida de todos os ângulos e distâncias entre os vértices. Neste levantamento, o emprego de medidores eletrônicos de distâncias (ou mesmo, receptores GPS), associados à aparelhagem utilizada para uma Triangulação (Teodolitos Eletrônicos), produz figuras geodésicas nas quais são medidos tanto os lados como as direções.

Este processo de levantamento, embora trabalhoso, proporciona uma superabundância de observações, melhorando sensivelmente a precisão das coordenadas finais obtidas pelas técnicas do ajustamento. No ajustamento dessas figuras são obtidas correções para as medidas lineares e angulares, tendo com isso um melhor controle na precisão das coordenadas finais.

### 5.1. Procedimento de Campo e Resultados

Utilizou-se para cálculo da Trianlateralção as observações da Triangulação (Item 2) e da Trilateração (Item 4) (Tabelas 7 e 8) (Figura 4).

TABELA 7 : Dados de Entrada

Número de Estações	Número de incógnitas	Núm. de observações				
		Ângulos	Distância	Azimutes	Posições	Total
4	8	8	6	1	2	17

TABELA 8 : Dados de Saída

Est	Coord. Ajustadas		Desvio Padrão		Elipse de Erros		
	Norte (m)	Este (m)	Norte (mm)	Este (mm)	Max. (mm)	Min. (mm)	Az. do eixo maior (grau)
1	1000,000	1000,000	0,0	0,0	0,0	0,0	círculo
2	1106,466	1106,466	1,2	1,2	1,7	0,0	45
3	1137,436	1221,776	1,9	2,0	2,3	1,5	47
4	1031,526	1199,461	2,0	1,8	2,2	1,5	37

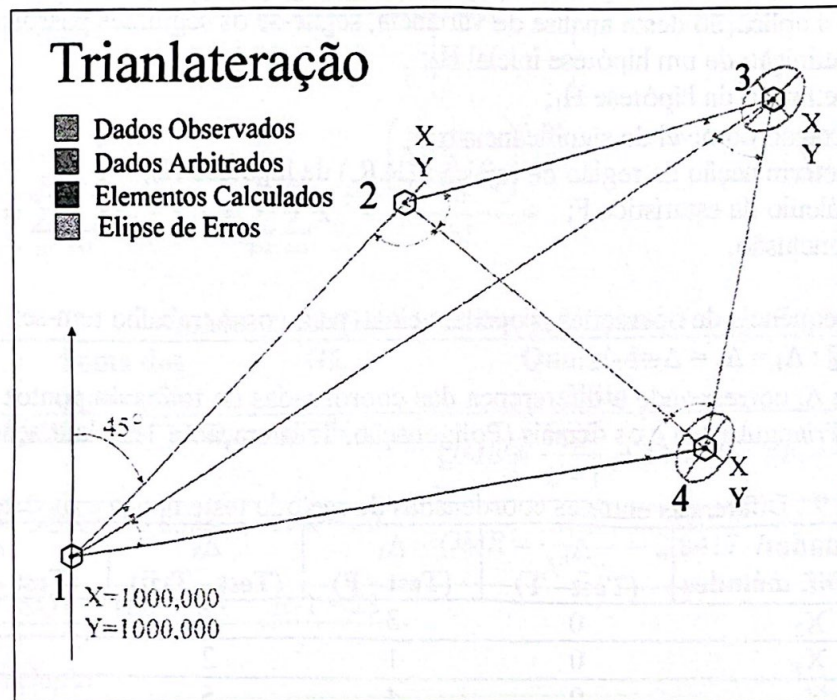


FIGURA 4: Método de levantamento por Trianlateralção.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E COMPARAÇÕES

Deve ser claro ao leitor que as considerações a serem relatadas a seguir, estão diretamente relacionadas às hipóteses iniciais, ou seja:

- Apenas 4 vértices, sendo que para o primeiro ponto (ponto 1) adotou-se coordenadas fixas ( $X_1$  e  $Y_1$  arbitrados e livres de erros), e as demais calculadas;
- O azimute inicial arbitrado e livre de erro ( $Az_{12}$ );
- Área micro-geodésica (distância máxima de aproximadamente 260m).

Logo, a análise desenvolvida, baseia-se nessas hipóteses iniciais, e qualquer conclusão externa (mudança de geometria, variação de distância entre vértices, métodos de coleta (especificações), instrumental, etc.) a esta proposta, deverá conter estudos particulares.

Na comparação entre os métodos propostos, partiu-se do princípio que o método por Triangulação obteve-se melhor precisão na determinação das coordenadas finais, adotando-o como método testemunha. Para comparação, apoia-se a um estudo estatístico, para avaliar os diferentes níveis de precisão entre o método testemunha e os demais, e relata-se as vantagens e desvantagens de cada processo de levantamento.

### 6.1. Análise Estatística

O estudo estatístico baseia-se na análise da variância. Esta análise é a principal técnica utilizada para a comparação entre várias médias e é um método poderoso capaz de identificar diferenças entre as médias populacionais devido a várias causas, atuando simultaneamente sobre os elementos da população.

Neste trabalho, utilizou a análise da variância a um critério de classificação, onde neste modelo, os elementos observados são classificados segundo um critério, ou seja, existe apenas uma característica de interesse a ser testado (Marques, 1987).

A característica a ser testada será se a diferença entre as coordenadas do método considerado como testemunha (Triangulação) e os demais (Poligonação, Trilateração e Triangulação) diferem ou não entre si. Caso rejeite a hipótese inicial ( $H_0$ ), verificar quais se diferem entre si.

Para a aplicação desta análise de variância, segue-se os seguintes passos:

- Definição de um hipótese inicial  $H_0$ ;
- Definição da hipótese  $H_1$ ;
- Fixação do nível de significância  $\alpha$ ;
- Determinação da região de rejeição (R.R.) da hipótese  $H_0$ ;
- Cálculo da estatística F;
- Conclusão.

Da sequência de operações proposta acima, para nosso trabalho tem-se:

a)  $H_0 : \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$

onde  $\Delta_i$  corresponde a diferença das coordenadas de todos os pontos entre o método testemunha (Triangulação) e os demais (Poligonação, Trilateração e Triangulação) (Tabela 9).

TABELA 9 : Diferenças entre as coordenadas do método testemunha e os demais métodos

Coordenadas\ Dif. métodos	$\Delta_1$ (Test - T)	$\Delta_2$ (Test - P)	$\Delta_3$ (Test - Tril)	$\Delta_4$ (Test - Trian)
$X_2$	0	3	5	3
$X_3$	0	1	2	5
$X_4$	0	4	5	3
$Y_2$	0	3	5	3
$Y_3$	0	2	11	4
$Y_4$	0	2	6	6
Soma	0	15	34	24
Média	0	2.50	5.67	4.00

onde:

$\Delta_i$  (i = 1, 2, 3, 4) em milímetros (em valores absolutos);

Test - Testemunha; T - Triangulação; P - Poligonação; Tril - Trilateração; Trian - triangulação.

b)  $H_1$  : pelo menos um dos  $\Delta_i$  se difere dos demais.

c) Nível de significância  $\alpha = 0.05$  (5 %).

d) Determinação da região de rejeição (R.R.)

- Cálculo de GL (grau de liberdade)  $\Rightarrow F_{\alpha}(k-1, N-k)$

1) Definição de k - 1 (k - número de métodos)

$$k - 1 = 4 - 1 = 3$$

2) Definição de N - k (N - número total de observações)

$$N - k = 24 - 4 = 20$$

3) Da tabela da distribuição F de Snedecor

$$F_{0,05}(3, 20) = 3,10$$

e) Cálculo da estatística F:

Os resultados deste cálculo pode ser melhor visualizado pelo Quadro 1, baseado nas seguintes equações:

$$SQE = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{n_j} \right] - \frac{\left( \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{N} \quad (1)$$

$$SQR = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{n_j} \right] \quad (2)$$

$$SQT = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{\left( \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{N} \quad (3)$$

Quadro 1: ANOVA (Análise da Variância)

Fonte de variação	Soma dos quadrados	GL	Quadrado médio	Estatística F
Entre amostras	SQE = 104,1250	k-1 = 3	$QME = \frac{SQE}{k-1} = 34,7083$	$F = \frac{SQE}{QMR} = 12,21$
Residual	SQR = 56,8333	N-k = 20	$QMR = \frac{SQR}{N-k} = 2,8417$	
Total	SQT = 160,9583	N-1 = 23		

f) Conclusão

Como F = 12,21 (Quadro 1) foi maior que  $F_{0,05}(3, 20) = 3,10$ , rejeita-se  $H_0$ , ou seja, existe pelo menos uma das diferenças ( $\Delta_i$ ) que se diferencia significativamente das demais.

Baseado na conclusão (alínea f), aplicou-se o método de Scheffé, com objetivo de avaliar quais dos  $\Delta_i$ s, se equivalem, ou não se diferem. Para o modelo de classificação única, se duas médias  $\mu_i$  e  $\mu_j$  diferirem significativamente, Scheffé demonstrou que:

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > \Delta\alpha \quad (4)$$

onde

$$\Delta\alpha = \sqrt{QMR \cdot \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right) \cdot (k-1) \cdot F_\alpha(k-1, N-k)} \quad (5)$$

Na Tabela 10 tem-se os resultados aplicando este método:

TABELA 10 : Utilização do método de Scheffé

Diferença entre Métodos	$\Delta\alpha$ (mm)	$ \bar{x}_i - \bar{x}_j $ (mm)	Conclusão
$\Delta_1$ e $\Delta_2$	2,97	2,50	não diferem
$\Delta_1$ e $\Delta_3$	2,97	5,67	difere
$\Delta_1$ e $\Delta_4$	2,97	4,00	difere
$\Delta_2$ e $\Delta_3$	2,97	3,17	difere
$\Delta_2$ e $\Delta_4$	2,97	1,50	não diferem
$\Delta_3$ e $\Delta_4$	2,97	1,67	não diferem

Baseado na Tabela acima (Tabela 10), pode-se afirmar que, não havendo recursos para aplicar a Triangulação, pode-se lançar mão da Poligonização pois estes não diferem ao nível de significância considerado. Outras conclusões podem ainda ser extraídas, como a não diferenciação entre a Triangulação e a Poligonização e Trilateração.

## 6.2. Conclusão

Como o método de levantamento por Triangulação foi tomado como testemunha, descreve-se inicialmente algumas de suas vantagens e desvantagens:

Vantagens:

- a) Baixo investimento em instrumental e equipamentos auxiliares;
- b) Precisão considerável.

Desvantagens:

- a) Complexidade do método;
- b) Necessidade de uma base de ampliação precisa;
- c) Dispendio de tempo.

### Comparando Triangulação e Poligonização

Observou-se pela Tabela 10 que não diferem significativamente.

Vantagens:

- a) Boa precisão;
- b) Método mais fácil e rápido.

Desvantagem:

- a) Custo elevado de equipamentos.

### Comparando Triangulação e Trilateração

Observou-se pela Tabela 10 ser o que mais difere significativamente para a Triangulação.

Deve ser claro que o método de Trilateração geralmente é utilizado para grandes distâncias (o que não é o caso), verificando nestas situações um método muito preciso. Esta boa precisão para grandes distâncias se deve ao fato de que os aparelhos destinados a avaliar a distância eletronicamente, geralmente comportam um erro constante mais um erro relacionado com a distância a medir.

Vantagens:

a) Impossibilidade de intervisibilidade entre pontos da Triangulação pode-se utilizar a Trilateração;

- b) Obtenção de coordenadas aéreas em locais de difícil acesso e intervisão entre pontos.

Desvantagens:

- a) Custo elevado;
- b) Baixa precisão.

### **Comparando Triangulação e Triangulação**

Observou-se pela Tabela 10 que difere significativamente da Triangulação.

O método de Triangulação deveria não diferir da Triangulação, pois ao número de parâmetros é maior (ângulos e distâncias). Porém, a precisão na observação das distâncias foi prejudicada, propagando as diferenças no cálculo das coordenadas.

Vantagens:

a) Maior rigidez.

Desvantagens:

a) Alto custo;

b) Dispendio de tempo;

c) Complexidade para o ajustamento.

Enfim, pode-se afirmar que o método de levantamento a ser utilizado para execução de um projeto está diretamente ligado a vários fatores, podendo citar:

a) Precisão desejada;

b) Disponibilidade de tempo;

c) Instrumental disponível;

d) Condições atmosféricas e topográficas do local;

e) Nível técnico do operador e auxiliares;

f) Custo de execução.

De acordo com esses fatores envolvidos num levantamento, faz-se a opção de acordo com as comparações, vantagens e desvantagens citadas acima. Deve-se ter em mente que os resultados obtidos neste trabalho, estão relacionados às precisões nas observações, condições locais e geometria dos pontos em estudo.

## **7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- BRASIL, Ministério do Exército. **Manual Técnico: Triangulação e Triangulação Geodésicas**; Brasília, 1976.
- CAMIL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas**; Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1994.
- CARVALHO, C.A. **Triangulação Geodésica**; Viçosa: Curso de Graduação em Engenharia de Agrimensura, 1987.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Especificações e Normas Gerais para Levantamentos Geodésicos**; Resolução PR n.22, Boletim de Serviço n. 1602, 1983.
- MARQUES, J.M. **Ajustamento de Observações I (Estatística)**; Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 1987
- PERALTA, M.M. **Introducción a la Geodésia Geométrica**; México, Limusa, 1974.
- PINTO, L.E.K. **Curso de Topografia**; Salvador, BA, Centro Editorial e Didático da Universidade Federal da Bahia, 1989.
- SILVA, A.J.P.A. **O Uso do GPS nas Medições Geodésicas de Curta Distância**; Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 1991.
- SILVA, A.S. & FERRAZ, A.S. **Geodésia**; Imprensa Universitária da Universidade Federal de Viçosa, 1986.
- SILVA, A.S. & FERRAZ, A.S. **Transporte de Coordenadas Geodésicas**; Imprensa Universitária da Universidade Federal de Viçosa, 1985.
- SILVA, A.S. **TAGNET**; Versão de 20out93/a, Universidade Federal de Viçosa, 1994.