AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS TOPOGRÁFICAS PELO MÉTODO PARAMÉTRICO.

CAMARGO, P.O.[(1)]**; CORDINI, J.**[(2)]**; FABRI, S.M.**[(3)]

(1) **UNESP**. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Deptº de Cartografia.
Caixa Postal 957 - CEP: 19060-900 - Presidente Prudente/SP.
(2) **UFSC**. Centro Tecnológico. Deptº de Engenharia Civil.
Caixa Postal 476 - CEP: 88010-970 - Florianópolis/SC.
(3) **UFPR**. Centro Politécnico. Deptº de Física.
Caixa Postal 19.011 - CEP: 81531-990 - Curitiba/PR.

ABSTRACT

The present work aims to discusse the adjustment of topographic traverses based on criterion of square least adjustment, employing the parametric method or indirect observations method. When the adjusted coordinates of the traverse points are achieved, we can obtain the covariance matrix. The equations of the distances, angles, azimuths and positions used in adjustment are presented, and the necessaries constraints to avoid singular matrix for the coefficients. An analysis of the tolerances, in agreement with NBR-13.133, before and after the adjustment, and the statistics analysis of the adjustment too are presented.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo o ajustamento de poligonais topográficas baseado no critério dos mínimos quadrados, empregando o método paramétrico ou das observações indiretas. São obtidas as coordenadas ajustadas dos vértices da poligonal, bem como a respectiva matriz variância-covariância. São apresentadas as equações envolvidas no ajustamento, relativas às distâncias, ângulos, azimutes e posições, e as injunções necessárias para que a matriz dos coeficientes das equações normais seja não singular. É apresentada também uma análise das tolerâncias segundo a NBR-13.133, antes e após o ajustamento, e a análise estatística do ajustamento.

Palavras chave: Levantamento topográfico. Poligonais topográficas. Ajustamento.

1 INTRODUÇÃO

Em linhas gerais, ajustar observações significa buscar a partir de um conjunto de medidas reconhecidamente incorretas, pela discrepância existentes entre elas, um resultado que seja único e que possa representar com a maior confiança a grandeza medida. Com isso, fica claro a necessidade de abdicarmos da pretensão de obter o verdadeiro valor para a grandeza medida (Gemael, 1994).

Três são os tipos de medidas ou observações efetuadas: *observações diretas* quando as medições se processam diretamente sobre a grandeza incógnita; *observações indiretas* quando tais medições são processadas sobre grandezas que se ligam às incógnitas por meio de relações matemáticas conhecidas; e, *observações diretas condicionadas* quando as medições são efetuadas sobre as grandezas incógnitas que se vinculam entre si através de modelos matemáticos. Na terminologia atual, onde o tratamento matemático é baseado no cálculo matricial, o método de ajustamento das observações indiretas é denominado *paramétrico* ou método das equações de observação, e o das observações diretas condicionadas, *método dos correlatos*.

2 MÉTODO PARAMÉTRICO

No ajustamento pelo método paramétrico cada observação (ou medida) proporciona uma equação de observação. Denotando por n o número total de observações efetuadas, ter-se-á n equações de observação. As equações são da forma explícita, isto é, pode-se explicitar cada observação em função dos parâmetros envolvidos, os quais são em número igual a u.

2.1 Modelo matemático

O modelo matemático do método paramétrico é

$$L_a = F(X_a), \tag{1}$$

onde:

L_a é o vetor das observações ajustadas (n x 1);
X_a é o vetor dos parâmetros ajustados (u x 1), e
F é a função que relaciona L_a e X_a, podendo ser linear ou não linear.

2.2 Linearização do modelo

Nos casos em que a função $F(X_a)$ do modelo é não linear, o ajustamento paramétrico é dito não linear. Em geral, os modelos não são lineares o que indica a necessidade de se proceder a linearização do modelo, visando facilitar a obtenção da solução. Em decorrência da aproximação introduzida pela linearização do modelo, a solução será obtida por processo iterativo.

No processo de linearização atribuem-se valores aproximados X_0 aos parâmetros X_a, como ponto de expansão da função $F(X_a)$ em série de Taylor. Nesta expansão consideram-se apenas os dois primeiros termos da série. Sejam

$$\left.\begin{array}{l} X_a = X_0 + X \\ L_a = L_b + V \end{array}\right\}, \tag{2}$$

onde:

X_0 vetor (u x 1) cujas componentes são os valores aproximados dos parâmetros;
X vetor (u x 1) das correções dos parâmetros;
L_b vetor (n x 1) dos valores observados;
V vetor (n x 1) dos resíduos.

A expressão (1) pode então ser reescrita sob a forma

$$L_b + V = F(X_0 + X).$$

Linearizando o segundo membro da expressão acima, pela fórmula de Taylor, resulta

$$L_b + V \cong F(X_0) + \left.\frac{dF}{dX_a}\right|_{X_0} X.$$

Designando a função dos parâmetros aproximados por L_0

$$L_0 = F(X_0),$$

com dimensão (n x 1), e a matriz (n x u) das derivadas parciais por A

$$A = \left.\frac{dF}{dX_a}\right|_{X_0},$$

denominada matriz dos coeficientes, tem-se

$$L_b + V = L_0 + AX,$$

ou

$$V = AX + L_0 - L_b,$$

e representando a diferença entre L_0 e L_b por L, ou seja

$$L = L_0 - L_b,$$

obtém-se o *modelo matemático linearizado do método paramétrico*

$$_nV_1 = {}_nA_u\, {}_uX_1 + {}_nL_1. \tag{3}$$

2.3 Equações normais

O modelo linearizado (3) representa n equações de observação, as quais apresentam como incógnitas n resíduos e u parâmetros, formando um sistema inconsistente. Entretanto, o sistema apresenta um número maior de incógnitas *(n+u)* em relação ao número de equações. Recorre-se então ao princípio do *método dos mínimos quadrados* para a obtenção da solução, minimizando a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja

$$\phi = V^T PV = mínimo. \tag{4}$$

Derivando a função ϕ em relação a X, igualando a zero a derivada primeira, e fazendo $N = A^T PA \longrightarrow$ matriz dos coeficientes das equações normais (u x u), e $U = A^T PL \longrightarrow$ vetor dos termos independentes (u x 1), tem-se

$$_uN_u\, {}_uX_1 + {}_uU_1 = 0, \tag{5}$$

que representa um sistema de u equações normais cuja solução é dada pelo vetor

$$X = -N^{-1} U. \tag{6}$$

O vetor dado pela (6) representa as correções que somadas aos parâmetros aproximados (X_0) possibilitam a determinação dos parâmetros ajustados (X_a):

$$X_a = X_0 + X. \tag{7}$$

Como o modelo foi linearizado, a solução final será obtida através de um processo iterativo. Tal processo é encerrado quando os elementos do vetor X são numericamente inferiores a ε escolhido como ponto de convergência. O limite de convergência ε é estabelecido de acordo com a precisão necessária para os parâmetros, que no trabalho em questão são as coordenadas dos vértices da poligonal.

3 ESTIMATIVA DA PRECISÃO

3.1 Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros Ajustados

Quando se faz a estimativa de um valor ou de um conjunto de valores (parâmetros), é necessário estimar a qualidade dos mesmos. A partir das observações (L_b) e da estimativa de precisão destas observações (Σ_{L_b}), é possível estimar a precisão dos parâmetros ajustados.

Na expressão (7), como X_0 é o vetor dos valores aproximados, não se dispõe de sua MVC; então, é assumido que

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X,$$

com

$$X = -(A^TPA)^{-1}\, A^TP(L_0 - L_b).$$

Aplicando-se a lei de propagação de covariâncias (Gemael, 1994) na expressão anterior obtém-se

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \sigma_0^2\, N^{-1}. \tag{8}$$

O fator de variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) pode ser calculado pela expressão

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^TPV}{n-u}. \tag{9}$$

Este valor é uma estimativa *não tendenciosa* de σ_0^2, arbitrado no início do ajustamento. Desde que o ajustamento seja aceito no teste estatístico, utiliza-se o fator de variância a posteriori para o cálculo das MVC.

3.2 Observações ajustadas e MVC das observações ajustadas

Freqüentemente tem-se interesse no conhecimento dos valores observados ajustados e da respectiva precisão. Uma vez obtido o vetor das correções aos parâmetros X, pode-se obter o vetor dos resíduos V

$$V = AX + L,$$

e a seguir o vetor das observações ajustadas

$$L_a = L_b + V. \tag{10}$$

A estimativa da precisão pode ser obtida a partir da lei de propagação das covariâncias aplicada à expressão (10), que resulta em

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 \, A \, N^{-1} \, A^T. \tag{11}$$

3.3 Resíduos e MVC dos resíduos

A partir das expressões que facultam o cálculo dos resíduos

$$V = AX + L \qquad ou \qquad V = L_a - L_b,$$

pode-se estimar a MVC dos resíduos, pela aplicação da lei de propagação das covariâncias, o que resulta

$$\Sigma_V = \Sigma_{L_a} - \Sigma_{L_b}. \tag{12}$$

4 AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS TOPOGRÁFICAS

Com o método paramétrico, designado também método *de variação de coordenadas*, quando aplicado no ajustamento de triangulação, trilateração, poligonação, ou combinação entre tais processos de levantamento (Gemael, 1994), obtém-se ao final do ajustamento, as coordenadas finais dos vértices com suas respectivas precisões.

Ao efetuar o ajustamento de poligonais, bem como de outros processos de levantamento, é necessário considerar as *injunções* mínimas, *absolutas* ou *relativas*, de forma que a matriz N [equação (6)] seja não singular, e assim admitir inversa *ordinária* (em termos da álgebra matricial de Cailley). Caso contrário é necessário recorrer ao ajustamento livre.

As injunções mínimas que evitam a indeterminação do sistema, são determinadas condições impostas aos parâmetros envolvidos no ajustamento. No caso de poligonais, deve-se impor restrições que impeçam as translações e rotações, o que é conseguido através do conhecimento das coordenadas (X, Y) de pelo menos um ponto e do azimute (Az) de uma direção.

Quando o parâmetro é mantido fixo, a injunção é dita absoluta, e na montagem da matriz A não aparecem as derivadas parciais em relação a esses parâmetros. A injunção relativa, conhecida como injunção com peso, trata os parâmetros como observações adicionais, às quais são atribuídos pesos.

Antes de ajustar uma poligonal é necessário efetuar as reduções das observações lineares e angulares ao plano de referência adotado, que pode ser o plano topográfico local ou UTM. Com a finalidade de atender a *NBR 13.133: normas para execução de levantamentos topográficos*, deve-se proceder a verificação do fechamento da poligonal conforme a tolerância estabelecida em função do tipo e classe da poligonal em estudo.

Para o estabelecimento das equações envolvidas no processo de ajustamento, deve-se lembrar que as mesmas estão relacionadas com o tipo de observações obtidas no levantamento. No caso de poligonais, estas observações se constituem nas distâncias e ângulos ou direções, bem como as injunções de azimute e posição.

4.1 Equações de observação

A partir do modelo matemático do método paramétrico [equação (1)], pode-se estabelecer, para dois vértices i e j, as equações de distância e azimute, respectivamente por

$$S_{ij}^{a} = [(X_j^a - X_i^a)^2 + (Y_j^a - Y_i^a)^2]^{1/2} \tag{13}$$

e

$$Az_{ij}^{a} = arctg \left(\frac{X_j^a - X_i^a}{Y_j^a - Y_i^a} \right) + Q, \tag{14}$$

onde Q é uma constante que assume o valor zero no caso em que as diferenças $X_j^a - X_i^a$ e $Y_j^a - Y_i^a$ apresentem resultados positivos; $Q = 180^0$ quando ambas as diferenças são negativas ou somente a diferença $Y_j^a - Y_i^a$ for negativa; $Q = 360^0$ para o caso em que a diferença $X_j^a - X_i^a$ for negativa e $Y_j^a - Y_i^a$ for positiva.

As equações (13 e 14) na forma linearizada , formam respectivamente, as equações de observação para a distância observada S_{ij}^b e para o azimute calculado Az_{ij}^c

$$V_{ij}^{S} = \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{S_{ij}^0} \right) X_i + \left(\frac{Y_i^0 - Y_j^0}{S_{ij}^0} \right) Y_i - \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{S_{ij}^0} \right) X_j - \left(\frac{Y_i^0 - Y_j^0}{S_{ij}^0} \right) Y_j + S_{ij}^0 - S_{ij}^b \tag{15}$$

e

$$V_{ij}^{Az} = \left(\frac{Y_i^0 - Y_j^0}{(S_{ij}^0)^2} \right) X_i - \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{(S_{ij}^0)^2} \right) Y_i - \left(\frac{Y_i^0 - Y_j^0}{(S_{ij}^0)^2} \right) X_j + \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{(S_{ij}^0)^2} \right) Y_j + Az_{ij}^0 - Az_{ij}^c. \tag{16}$$

A equação de ângulo, envolvendo três vértices j, i, k, na forma linearizada é dada por

$$\begin{aligned} V_{jik}^{\alpha} = & \left(\frac{Y_i^0 - Y_k^0}{(S_{ik}^0)^2} - \frac{Y_i^0 - Y_j^0}{(S_{ji}^0)^2} \right) X_i + \left(\frac{X_k^0 - X_i^0}{(S_{ik}^0)^2} - \frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ji}^0)^2} \right) Y_i - \\ & - \left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ji}^0)^2} \right) X_j - \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{(S_{ji}^0)^2} \right) Y_j + \left(\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{(S_{ik}^0)^2} \right) X_k + \\ & + \left(\frac{X_i^0 - X_k^0}{(S_{ik}^0)^2} \right) Y_k + \alpha_{jik}^0 - \alpha_{jik}^b. \end{aligned} \tag{17}$$

A equação de posição, para um vértice i é dada por

$$\left. \begin{aligned} V_{X_i} &= X_i + X_i^0 - X_i^b \\ V_{Y_i} &= Y_i + Y_i^0 - Y_i^b \end{aligned} \right\} . \tag{18}$$

As equações de azimute e posição são as equações de injunção. Se no ajustamento, a posição for considerada como injunção absoluta, a equação (18) não existirá, e as equações de distância, azimute e ângulo, considerando o vértice i como fixo, o que implica em fazer $X_i = Y_i = 0$, assumem os seguintes aspectos, respectivamente

$$V_{ij}^{S} = \left(\frac{X_j^0 - X_i^0}{S_{ij}^0} \right) X_j + \left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{S_{ij}^0} \right) Y_j + S_{ij}^0 - S_{ij}^b, \tag{19}$$

$$V_{ij}^{Az} = \left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \right) X_j + \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{(S_{ij}^0)^2} \right) Y_j + Az_{ij}^0 - Az_{ij}^c, \tag{20}$$

e

$$V_{jik}^{\alpha} = -\left(\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ji}^0)^2}\right) X_j - \left(\frac{X_i^0 - X_j^0}{(S_{ji}^0)^2}\right) Y_j + \left(\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{(S_{ik}^0)^2}\right) X_k +$$

$$+\left(\frac{X_i^0 - X_k^0}{(S_{ik}^0)^2}\right) Y_k + \alpha_{jik}^0 - \alpha_{jik}^b. \qquad (21)$$

Vale ressaltar aqui, que as equações de distância, azimute e ângulo terão este aspecto somente quando um vértice é considerado como fixo; nos demais casos prevalecem as equações anteriores.

Nas equações acima os termos $(X,Y)_i$, $(X,Y)_j$ e $(X,Y)_k$ representam as correções aos parâmetros aproximados $(X,Y)_i^0$, $(X,Y)_j^0$, $(X,Y)_k^0$. S_{ij}^0, Az_{ij}^0 e α_{jik}^0 são respectivamente, as distâncias, azimutes e ângulos (L_0) calculados em função dos parâmetros aproximados (X_0). Os parâmetros aproximados (X_0) são calculados a partir do transporte de coordenadas, utilizando-se os valores observados.

5 MONTAGEM DAS MATRIZES E VETORES ENVOLVIDOS NO AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS FECHADAS

Seja uma poligonal fechada (início e chegada da poligonal no mesmo ponto), por exemplo, com *n=6* vértices e cujas coordenadas do vértice 1 (X_1, Y_1) sejam conhecidas e fixas, assim como o azimute da direção 1-2.

Antes da montagem das matrizes e vetores envolvidos no ajustamento, conforme visto anteriormente, é necessário efetuar o transporte de coordenadas utilizando os valores observados dos ângulos e distâncias, obtendo-se assim o vetor dos parâmetros aproximados (X_0), cujos elementos correspondem às coordenadas aproximadas (X_i^0, Y_i^0) dos vértices *2, 3,...,6*:

$${}_{2n-1}(X_0)_1 = (\, X_2^0 \quad Y_2^0 \quad X_3^0 \quad Y_3^0 \quad \cdots \quad X_6^0 \quad Y_6^0\,)^T .$$

A matriz A é montada a partir dos coeficientes das equações (17 e 15), alternadamente para ângulos e distâncias respectivamente, para os *n=6* vértices, e da equação (16) para o azimute. Assim, ela será constituída de *13* linhas, que correspondem às equações de observação, e *10* colunas, que correspondem aos parâmetros incógnitos X, ou seja, as correções $(X_2, Y_2, ..., X_6, Y_6)$ às coordenadas aproximadas. A matriz A terá então o aspecto mostrado na Tabela (1).

Os diversos elementos da matriz A são calculados com as expressões:

$$a_{ji} = \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ji}^0)^2}, \qquad b_{ji} = \frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ji}^0)^2},$$

$$c/i = 1,3,...,6 \qquad j = 6,2,...,5. \; para\ angulo \qquad e\ c/i = 2 \text{ e } j = 1, \; para\ azimute;$$

$$c_{jik} = a_{ji} - e_{ik} \qquad d_{jik} = f_{ik} - b_{ji},$$

$$c/j = 1,2,...,4,5; \qquad i = 2,3,...,5,6; \qquad k = 3,4,...,6,1.$$

$$e_{ik} = \frac{Y_k^0 - Y_i^0}{(S_{ik}^0)^2}, \qquad f_{ik} = \frac{X_k^0 - X_i^0}{(S_{ik}^0)^2},$$

$$c/i = 1,2,...,5. \qquad k = 2,...,6;$$

Tabela 1: Elementos da matriz ${}_{13}A_{10}$

$$\begin{bmatrix}
e_{12} & -f_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n1} & b_{n1} \\
-g_{12} & -h_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{123} & d_{123} & e_{23} & -f_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
g_{23} & h_{23} & -g_{23} & -h_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{23} & b_{23} & c_{234} & d_{234} & e_{34} & -f_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & g_{34} & h_{34} & -g_{34} & -h_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -a_{34} & b_{34} & c_{345} & d_{345} & e_{45} & -f_{45} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & g_{45} & h_{45} & -g_{45} & -h_{45} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -a_{45} & b_{45} & c_{456} & d_{456} & e_{56} & -f_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{56} & h_{56} & -g_{56} & -h_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{56} & b_{56} & c_{561} & d_{561} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{61} & h_{61} \\
a_{12} & -b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \frac{X_i^0 - X_j^0}{S_{ij}^0}, \qquad h_{ij} = \frac{Y_i^0 - Y_j^0}{S_{ij}^0},$$

$$c/i = 1,2,...,6,5 \qquad j = 2,3,...,6,1;$$

O vetor das observações L_b, composto dos ângulos e das distâncias observadas e o vetor L_0, onde $L_0 = F(X_0)$, têm o seguinte aspecto:

$${}_{13}(L_b)_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^b \\ S_1^b \\ \alpha_2^b \\ S_2^b \\ \vdots \\ \alpha_6^b \\ S_6^b \\ Az_{12}^c \end{bmatrix} \qquad {}_{13}(L_0)_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^0 \\ S_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ S_2^0 \\ \vdots \\ \alpha_6^0 \\ S_6^0 \\ Az_{12}^0 \end{bmatrix}$$

As distâncias e ângulos aproximados que formam o vetor L_0 são dados respectivamente por:

$$S_i^0 = \left[(X_{i+1}^0 - X_i^0)^2 + (Y_{i+1}^0 - Y_i^0)^2\right]^{1/2}$$

$$c/i = 1,...,6$$

$$\alpha_i^0 = Az_{i,i+1} - Az_{i,i-1}$$

onde

$$Az_{i,i-1} = arctan\, \frac{X_{i-1} - X_i}{Y_{i-1} - Y_i} + Q$$

$$Az_{i,i+1} = arctan\, \frac{X_{i+1} - X_i}{Y_{i+1} - Y_i} + Q$$

$$c/i = 1,...,6 \qquad p/i = 1 \longrightarrow (i-1) = 6 \qquad p/i = 6 \longrightarrow (i+1) = 1$$

O vetor L é obtido a partir da diferença entre os vetores L_0 e L_b; as diferenças devem ser expressas em radianos e metros, respectivamente para os ângulos e distâncias, a fim de compatibilizar as unidades envolvidas nos produtos matriciais do ajustamento.

A matriz peso $P = \sigma_0^2 \sum_{L_b}^{-1}$ é uma matriz quadrada de ordem (13). Se as observaões são não correlacionadas, como no caso de ângulos e distâncias, a matriz será diagonal, isto é, apresentando elementos não nulos somente na diagonal principal. Os pesos para as observações são calculados a partir do desvio padrão de cada observação, respectivamente para ângulo e distância, através das seguintes expressões

$$P_{\alpha_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\alpha_i}^2} \qquad P_{S_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{S_i}^2} \qquad c/i = 1, 2, ..., 6,$$

$$\sigma_{\alpha_i} \longrightarrow radianos; \qquad \sigma_{S_i} \longrightarrow metros,$$

e o peso para o azimute, considerado como fixo, é atribuído como tendendo ao infinito, ou seja $P_{Az} = \infty$.

Tabela 2: Matriz dos pesos ${}_{13}P_{13}$

$$\begin{bmatrix}
P_{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & P_{S_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & P_{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & P_{S_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_{\alpha_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{S_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\alpha_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{S_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{S_5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\alpha_6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{S_6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{Az}
\end{bmatrix}$$

A solução pelo método paramétrico é dada por:

$$X = -(A^T PA)^{-1}\, A^T P(L_0 - L_b)$$

Para o processo iterativo estabelecer um critério de convergência ε, como por exemplo, $\varepsilon = 1\ mm$.

A estimativa da precisão dos parâmetros e das observações ajustadas é o próximo passo do ajustamento:

$$X_a = X_0 + X \qquad \Sigma_{X_a} = \sigma_0^2\, N^{-1},$$

$$V = AX + L \qquad L_a = L_b + V,$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2\, AN^{-1}A^T.$$

O teste estatístico do qui-quadrado, para a aceitação do ajustamento também é realizado ao nível de significância α; geralmente $(1-\alpha) = 95\%$, ou seja, $\alpha = 5\%$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{gl} \longrightarrow gl = graus\ de\ liberdade\ = (2n+1-2(n-1)) = 3,$$

$$\chi^2_{calc.} = \frac{\hat{\sigma}_0^2\, gl}{\sigma_0^2} = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2},$$

Se

$$\chi^2_{(gl,\alpha/2)} < \chi^2_{calc.} < \chi^2_{(gl,1-\alpha/2)} \longrightarrow aceita - se\ o\ ajustamento.$$

Se o valor do qui-quadrado calculado ($\chi^2_{calc.}$) estiver dentro do intervalo pré-definido, obtido em tabela, ao nível de significância α, significa que o ajustamento é de boa qualidade. Caso contrário pode haver indícios de erros na MVC dos valores observados, presença de erros grosseiros ou sistemáticos nas observações, modelo matemático não condizente com as observações, ou sistema mal condicionado (Gemael, 1994). Assim, no caso de não aceitação do ajustamento, uma análise dos aspectos abordados deve ser realizada.

6 EXEMPLO

Dados os valores observados abaixo, adaptados de Mascarello (1995), calcular as coordenadas ajustadas dos vértices da poligonal utilizando o Método Paramétrico, bem como estimar a sua precisão.

Tabela 3: Caderneta de Campo

Elementos de Campo					
Vértices V_i	Distâncias d_i (m)	Desvio Padrão (m)	Ângulos Internos A_i	Desvio Padrão (")	Azimutes Az_i
1	60,85	0,050	$117^0\ 24'\ 50''$	20	$80^0\ 32'\ 20''$
2	41,20	0,050	113 29 40	20	
3	53,82	0,050	097 45 40	20	
4	42,40	0,050	203 11 30	20	
5	63,20	0,050	063 26 10	20	
6	49,95	0,050	124 40 30	20	
Σ	311,42		719 58 20		

6.1 Resultados obtidos

1) Erros cometidos:

Angular	-100,0 (")
Linear	$0,058\ (m)$
Relativo	1/5.381

2) Tolerância: (de acordo com a NBR-13.133; Poligonal tipo 1 e classe V)

Angular	440,91 (")
Linear	1,228 (m)
Relativo	1/253

3) Coordenadas ajustadas e respectivos desvios padrão:

Vértice	X (m)	DP (m)	Y (m)	DP (m)
1	500,000	0,000	500,000	0,000
2	560,000	0,049	509,999	0,008
3	569,989	0,046	549,950	0,047
4	520,006	0,048	569,945	0,052
5	490,022	0,041	599,929	0,056
6	470,024	0,032	539,955	0,043

4) Área da poligonal: $5.743,575 \pm 6,106\ m^2$ ou $0,574 \pm 0,0006\ ha$

5) Observações ajustadas e respectivos desvios padrão:

Vértice	Ângulo	DP (")	Distância (m)	DP (m)
1	$117^0\ 25'\ 06,2''$	23,00	60,827	0,049
2	113 29 55,6	22,97	41,181	0,050
3	097 45 56,2	22,99	53,834	0,052
4	203 11 47,0	23,02	42,404	0,054
5	063 26 27,9	22,95	63,220	0,050
6	124 40 47,1	23,00	49,949	0,054

6) Erro residual após o ajustamento:

Erro médio relativo entre duas estações consecutivas	1/1.410
Erro médio em ângulo e em azimute	22,99 (")
Erro médio em coordenadas dos vértices da poligonal	0,0442 (m)

7) Tolerância após o ajustamento:

Média relativa entre duas estações consecutivas	1/113
Média angular	180,00 (")
Média em coordenadas dos vértices da poligonal	0,549 (m)

8) Análise estatística do ajustamento:
Ajustamento aceito ao nível de significância de 5%, pois

$$0,22 < \chi^2_{calc.} = 4,78 < 9,35$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As fórmulas apresentadas no item 4 são genéricas, podendo ser aplicadas em diversas situações: poligonais apoiadas, triangulação, trilateração ou combinação de tais processos de levantamento.

No Método Paramétrico obtém-se ao final do ajustamento, aplicado em poligonais, as coordenadas ajustadas dos vértices, bem como a estimativa de sua precisão. A partir da MVC das coordenadas ajustadas pode-se obter o erro médio quadrático (σ) da área da poligonal, bem como construir a elipse de erro dos vértices , que constitui a região de incerteza da localização do vértice considerado.

No início do ajustamento é arbitrado um valor inicial para o fator de variância a priori σ_0^2; este valor inicial não tem influência no resultado do ajustamento, porém repercute na matriz N dos coeficientes das equações normais. Este fato pode ser explorado em caso de mau condicionamento do sistema.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES/PICD pela concessão da bolsa de doutoramento e também ao Prof. Dr. Camil Gemael pela revisão emprestada.

BIBLIOGRAFIA

ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Normas para execução de levantamentos topográficos.* Rio de Janeiro/RJ: ABNT, 1994.

CAMARGO, P.O. Ajustamento de uma rede de triangulação com e sem o termo dZi. Análise dos resultados. CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, XIV *Anais da SBC.* Gramado/RS: Maio, 1989. v. 1, p: 223–230.

CORDINI, J.; LOCH, C. *Topografia Contemporânea.* Florianópolis/SC: Editora da UFSC, 1a. ed., 1995.

GEMAEL, Camil. *Aplicações do Cálculo Matricial em Geodésia.* Curitiba: UFPr., [s. ed.], 1974.

GEMAEL, Camil. *Ajustamento de Observações Geodésicas. Noções de Estatística.* Curitiba: UFPr., [s. ed.], 1975.

GEMAEL, Camil. *Ajustamento: Variações de coordenadas.* Curitiba: UFPr., [s. ed.], 1976.

GEMAEL, Camil. *Introdução ao Ajustamento de observações: aplicações geodésicas.* Curitiba: Editora da UFPR., 1a. ed., 1994.

MASCARELLO, E.V. Cálculo analítico das coordenadas dos vértices e da área de uma poligonal fechada. Compensação de erros pelo método das translações dos vértices. *A MIRA,* Criciúma/SC: n. 50: 31–39, 1995.

MONICO, J.F.G. Ajustamento de poligonais geodésicas pelos métodos Paramétrico e Correlatos. Análise da MVC dos Parâmetros. CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, XIV *Anais da SBC.* Gramado/RS: Maio, 1989. v. 1, p: 219–222.