Propagação de erros nos levantamentos cadastrais

Prof. Cart. Gabriel Cremona Parma [1]
Prof. MSc. Carlos Alberto Pessoa Mello Galdino [2]
Acad. Miguel Pedro da Silva Neto [3]
Prof. Dr.-Ing. Jürgen Philips [4]

[1] Mestrando - Eng. Civil, área CTM - UFSC
UNL – Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Departamento de Cartografía
Ciudad Universitaria - Paraje El Pozo, Santa Fe - Argentina
gcremona@confluencia.net

[2,3] UFPE – Universidade Federal de Pernambuco - Brasil.
Departamento de Engenharia Cartográfica
Cidade Universitária, 51530-370 Recife PE

[2] Doutorando - Eng. Civil, área CTM e Gestão Territorial - UFSC
galdino@npd.ufpe.br
[3] Acadêmico de Eng. Cartográfica – UFPE
cadecart@npd.ufpe.br

[4] Professor Ciências Geodésicas
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico - Departamento de Engenharia Civil
88040-900 Florianópolis SC
jphilips@gmx.net

Conteúdo

Resumo: *Medir significa comparar. As medidas não permitem obter o valor verdadeiro da grandeza, daí a necessidade de estimação ou aproximação de seu valor; assim sendo, toda medida tem seu grau de incerteza. Este trabalho apresenta estudos concernentes à avaliação da qualidade da precisão posicional de medições e seus respectivos erros propagados através do transporte de coordenadas por levantamento polar, e da influência dessa propagação nos cálculos de áreas. Para se estudar esses erros foi utilizado a lei de propagação de erros pelo estudo da variância, considerando as medições – todos os tipos – e as variâncias oriundas das especificações instrumentais e calibração dos equipamentos utilizados. Sob essa ótica pode-se estabelecer um conjunto ordenado de procedimentos a serem seguidos para quantificar a grandeza dos erros. Ao final, são apresentados estudos de casos que a partir dos quais o GGT-UFSC – Grupo de Geodésia e Topografia da UFSC, sugeriu a precisão posicional para o cálculo de áreas junto ao IRIB – Instituto de Registro Imobiliário do Brasil, objetivando a regulamentação da lei 1067/2001 relativa ao cadastro rural brasileiro.*

Palavras chave: *geodésia, topografia, erros, propagação, teoria de erros, áreas*

Abstract: *To measure means to compare. The measures do not allow to get the true value of the largeness, from there the necessity of esteem or approach of its value; thus being, all measure has its degree of uncertainty. This work presents concernments studies the evaluation of the quality of the positional precision of measurements and its respective propagated errors the traverse the transport's of co-ordinates by polar survey, and the influence of this propagation in the area's calculations. To study these errors the propagation's law of this errors for the study of the variance was used, considering the measurements -all the types- and the deriving variances of the instrumental specifications and calibration of the used equipment. Under this optic a commanded set of procedures can be established to be followed to quantify the largeness of the errors. To the end, studies of cases from which are presented the GGT-UFSC – Geodesic and Topographic's Group of the UFSC, suggested the positional precision for the together calculation of areas to the IRIB – Record Institute of Brazil, objectifying the regulation of relative law 10267/2001 relative to cadastre of rustic land Brazilian.*

Keywords: *Geodesic, surveyors, errors, propagations, theories of errors, areas*

1 Introdução

As geociências necessitam da determinação quantitativa das grandezas e magnitudes pertinentes ao seu trabalho, e podem ser obtidas por métodos diretos ou indiretos. Na Geodésia, por exemplo, utiliza-se grandezas mensuráveis pontuais, lineares, gravitacionais, entre outras obtidas direta ou indiretamente.

Medir significa comparar o objeto da medida com um padrão. O resultado da medida se indica com um número e uma unidade, dependente do padrão usado. As medidas não permitem obter o "valor verdadeiro" da grandeza que se mede, devido a muitas razões, como a imperfeição dos instrumentos e de nossos sentidos.

O verdadeiro valor de uma magnitude não se pode obter, resulta daí a necessidade de *estimações ou aproximações* do valor mais provável da grandeza. Por exemplo, no âmbito da Física não tem sentido falar do valor de uma grandeza, e sim da probabilidade de obter um certo valor em uma medida de grandeza. Isto não é só o resultado das imperfeições dos instrumentos e dos sentidos do operador, fica relacionado também com a natureza das coisas.

Então, em função de tudo isso, toda medida tem um certo grau de incerteza. É necessário estimá-la pelo fato que seu conhecimento aumenta a informação própria da medida e ademais, porque permite manipular as grandezas com maior prudência com o grau de confiança exigido.

Por isso, quando se indica o resultado de uma medida, é necessário especificar três elementos:

- Número;
- Unidade; e,
- Incerteza.

A ausência de uma delas limita a informação proporcionada pela medição.

A análise da incerteza utilizando a Lei de Propagação de Erros (por variância), é muito útil, principalmente no planejamento de projetos de levantamentos, que exigem estudos preliminares e objetivam definir os instrumentos e métodos a serem utilizados naquela campanha. No caso dos projetos que utilizam medições polares (ângulos e distâncias), o estudo da propagação do erro baseado no conhecimento dos valores aproximados para ângulos e distâncias, e das variâncias provenientes de experiências anteriores ou das especificações dos instrumentos utilizados, conduzidos antes das operações de campo, caracteriza uma otimização "a priori" do Processo.

Sob essa ótica, pode-se estabelecer um conjunto ordenado de procedimentos a serem seguidos quando se aplicar a Lei de Propagação de Erros para análise de erros de grandezas relacionadas indiretamente ou não relacionadas. Assim:

- Estabelecer a função que relaciona as variáveis envolvidas (modelo matemático);
- Definir a precisão necessária para o trabalho (equipamento e método);
- Identificar as variáveis envolvidas;
- Determinar as derivadas parciais da função primitiva em relação as variáveis (observáveis);
- Obter a expressão geral do erro.
- Quantificar numericamente as derivadas a partir dos valores conhecidos;
- Introduzir os resultados na equação da Lei de Propagação de Erros.

Desta forma procede-se com a determinação da propagação dos erros das medições e cálculos, obtendo-se ao final a variância resultante deste acúmulo de erros propagados pela incerteza e natureza da medição.

2 Revisão bibliográfica

2.1 Erros

O significado da palavra *erro* não é muito precioso, já com freqüência diferentes autores o usam com sentidos diferentes. No mais amplo sentido, pode-se considerar como uma estimação ou quantificação da incerteza de uma medida. Quanto menos verdadeira seja uma medida, tanto maior será o erro que ela tem.

A estimação do erro nas medidas apresenta sua componente subjetiva: ninguém melhor que o próprio operador e sua experiência para conhecer o grau de confiança que merece a medição realizada. Não existe um conjunto de regras que permitam determinar o erro de uma medida em todos os casos imagináveis. Muitas vezes é tão importante indicar como é obtida a incerteza como seu próprio valor.

A aplicação de alguns métodos estatísticos permite efetuar a estimação de erros aleatórios, e obter os parâmetros de uma população (o conjunto de todas as medidas de uma magnitude) a partir de uma amostra (número limitado de medidas realizadas).

Existem vários estimadores, dos quais, os mais conhecidos e usados nas ciências geodésicas são a media aritmética, que é o melhor valor de um conjunto de grandezas e, o desvio padrão que permite estimar a qualidade das medidas por meio da quantificação de sua dispersão em relação a média.

2.2 Dispersão dos erros

O erro da medida deve estar relacionado com a dispersão dos valores; ou seja, se os valores obtidos na medição são semelhantes, o erro é pequeno e, se são diferentes, o erro deve ser grande.

Adotando um critério pessimista, pode-se dizer que o erro é a semidiferença entre o valor máximo e o mínimo. Por exemplo, em uma série de medidas de uma grandeza que tenham os seguintes resultados:

2342	2351	2356	2356	2357
2359	2362	2363	2365	2365
2367	2368	2368	2369	2370
2373	2374	2375	2382	2389

Os valores máximos e mínimos são 2342 e 2389. A semi-diferença é 23,5; cuja média é 2365,5; com o que se pode indicar o resultado como 2365,5 23,5, todos os valores do conjunto estão no intervalo citado. Este erro é excessivamente grande, ademais, o critério utilizado é discutível.

O mais apropriado é tomar como erro o desvio em relação à média aritmética. Porém, como os desvios diferem para mais e para menos do valor médio, sua soma se aproxima de zero.

Para evitar esta situação se usa, em vez o valor médio dos desvios, o valor médio dos quadrados dos desvios. Desta forma todos os elementos serão positivos.

O valor resultante se chama desvio típico, ou desvio padrão, ou desvio standard do conjunto de dados. Outros nomes que recebe são erro médio esperado, erro médio provável ou erro médio quadrático.

A expressão com a qual se calcula o erro é a seguinte:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2} \qquad \text{onde,} \qquad \varepsilon_i = x_i - \bar{x}$$

2.3 Desvio padrão

Os valores do desvio padrão indicados na seção anterior, são estimadores muito usados. O conjunto das medidas de uma magnitude com erros aleatórios podem se caracterizar por meio de uma distribuição estatística.

Quando o erro é devido á um grande número de pequenas causas independentes, a distribuição se aproxima á distribuição normal ou de Gauss.

A representação estatística de uma distribuição é a representação em abscissa do conjunto de valores que podem obter-se de uma medida e nas ordenadas a probabilidade de obter-los. No caso que a magnitude medida varie de forma contínua, em ordenadas é representada a probabilidade por unidade de intervalo da magnitude medida. Em uma distribuição contínua, a probabilidade que a medida fique entre dois valores $[x_0; x_1]$ vem apresentada pela expressão:

$$p = \int_{x0}^{x1} f(x)\,dx$$

Onde $f(x)$ é a função de densidade da distribuição. A função de densidade representa a probabilidade (por unidade de intervalo da grandeza medida) de se obter um determinado valor numa medida. Por isso, a relação seguinte é verdadeira:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

É seguro (probabilidade um) obter um valor qualquer quando se mede uma grandeza.

A função de densidade da distribuição normal tem o aspecto observado na Figura 1. Também se chama Campana de Gauss. Esta caracterizada por dois parâmetros, a média e o desvio padrão:

- A média é o valor que com maior probabilidade aparecerá em uma medida.
- O desvio padrão reflete a abertura da campana da curva de Gauss:
  - Uma abertura muita fechada corresponde a uma série de medidas muito pouco dispersas e, portanto, com poucos erros grandes – desvios pequenos;
  - Se for muito aberto, indica muitos erros grandes, o seja, o desvio padrão é grande.

Uma das propriedades da distribuição normal é que a probabilidade que fica no intervalo de $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ é do 68% aproximadamente: se medir uma grandeza muitas vezes 68% dos valores obtidos ficarão no entorno de 1σ em relação ao valor médio.

O erro expressado pelo desvio padrão tem portanto um significado probabilístico: tem uma probabilidade do 68% de que uma medida fique no entorno de 1σ ao redor da média. A probabilidade se amplia ao 95% ou 99% quando se considerar os intervalos duas ou e três vezes o desvio padrão respectivamente.

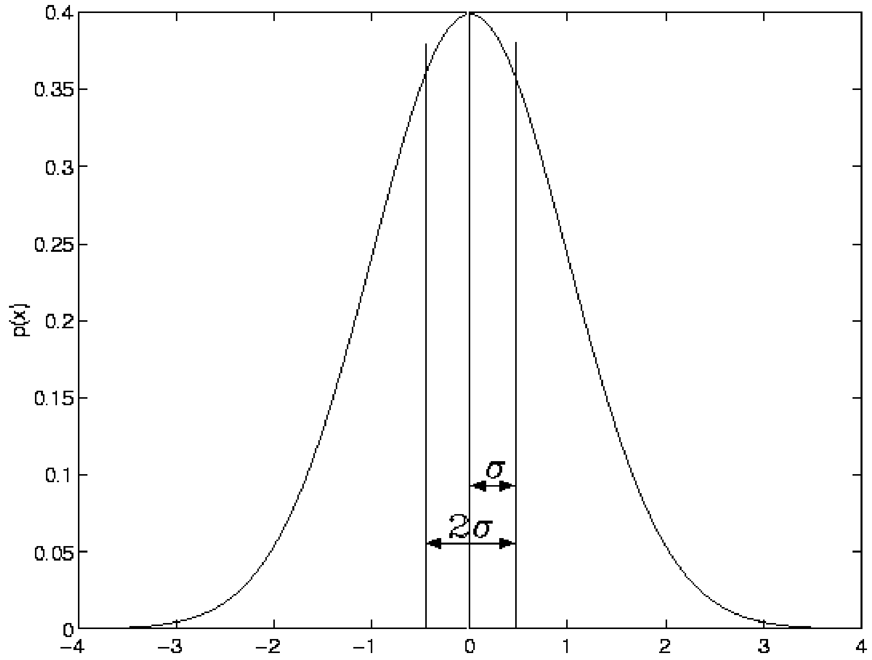

Figura 1 : Função de densidade da distribuição de Gauss

A distribuição normal nem sempre aparece com freqüência nas medidas de grandezas. A distribuição de uma série de medidas se aproxima a uma curva normal quando a fonte de erro é a superposição de muitas pequenas causas independentes. Se houver uma ou varias causas de erros predominantes ou se as causas dos erros não são independentes, se diz que as medidas apresentam um “*sloped*” ou *"sesgo"* e a distribuição apresenta-se de outras maneiras: não simétricas, com dois o mais máximos, etc.

2.4 Leis da propagação da variância

Toda operação matemática com números incertos dará resultados incertos, e fica necessário estimar o erro dos resultados a partir dos erros dos números envolvidos na operação.

Segundo Witte & Shimidt [1995], se as grandezas não forem medidas diretamente, mas derivadas de outras medidas com desvios casuais derivados destas grandezas (p. ex. a área de um retângulo é produto dos seus lados), o interessante está em como as variâncias dos dados de saída se “propagam” sobre os valores medidos (“lei de propagação dos erros”).

A variável casual Y seja uma função (em geral não-linear) de *n* variáveis casuais X_j cujas variâncias σ_j^2 são conhecidas.

Seja: $Y = \varphi(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$

Quando nestas relações funcionais para as variáveis casuais x_j valores concretos x_{ij} serão colocados resultam das variáveis casuais Y para determinadas grandezas, assim:

$Y_i = \varphi(X_{i1}, X_{2i}, X_{i3}, ..., X_{in})$

Para linearizar a função desenvolve-se a relação funcional conforme Taylor e obtém-se a diferencial total por redução da primeira derivada.

Para isso, deriva-se parcialmente a função φ uma após a outra com relação a variável X_j das variâncias $\sigma_j^2 \neq 0$. Se a variância σ_j^2 do componente X_j for igual a zero, não existe qualquer comportamento de dispersão e é tomado como constante, isto é, sua derivação é zero:

$$dy = \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_3} dX_3 + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial X_n} dXn$$

Substituindo-se o diferencial dX_j pelo desvio padrão σ_j e elevando a equação ao quadrado, tem-se como resultado a partir da lei de propagação das covariâncias, denominada “lei geral de propagação dos erros”, a variância σ_y^2 das variáveis ao acaso Y, para:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{dx_1}\right)^2 .\sigma_1^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{dx_2}\right)^2 .\sigma_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{dx_n}\right)^2 .\sigma_n^2 + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}.\frac{\partial\varphi}{dx_2}.\sigma_{12} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}.\frac{\partial\varphi}{dx_3}.\sigma_{13} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}.\frac{\partial\varphi}{dx_n}.\sigma_{n-1,n}\right)$$

Nesta equação $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \cdots$ representam as covariâncias entre variáveis mutuamente dependentes X_j .

Para variáveis dependentes X_j a covariância é nula, tal que a soma do produto total desaparece e surge a soma dos quadrados individuais da lei de propagação das variâncias para variáveis mutuamente dependentes X_j ("lei de propagação dos erros simplificada"), assim:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{dx_1}\right)^2 .\sigma_1^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{dx_2}\right)^2 .\sigma_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{dx_n}\right)^2 .\sigma = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_j}\right)^2 .\sigma_j^2$$

As derivadas parciais $\partial\varphi/\partial x$ são geradas na posição x_j , isto é, da introdução dos valores X_{ij} para variáveis X_j , nas leis de propagação resulta a variância σ_y^2 de um valor concreto y para a variável casual Y.

Caso as variâncias σ_j^2 sejam desconhecidas, os valores estimados s_j^2 podem ser substituídos na expressão geral, assim:

$$s_y^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_j}\right)^2 .s^2$$

O mesmo vale para cada equação da lei de propagação das covariâncias.

No uso prático necessita-se substituir o desvio padrão s_j por σ_j após a geração do diferencial total o diferencial ∂X_j e elevar ao quadrado cada elemento da equação. Deve-se observar que as grandezas da função X_j , em especial quando se trata de antigas medidas de grandeza, também sejam efetivamente independentes. Por exemplo, grandezas da função que foram derivadas de medidas de grandeza de uma terceira medida de grandeza, são independentes entre si.

Recomenda-se que, na construção de equação, deva-se retornar até os valores originais, isto é, no lugar de usar na função valores estimados, usar as fórmulas usadas para gerar estes valores estimados com seus valores originais para aí gerar o diferencial total relativo a essas grandezas de medidas (esses valores).

Representação gráfica da propagação de erros

Como exemplo ilustrativo, pode-se obter a mesma expressão do desvio padrão a través da aplicação de um caso simples:

Calcular a superfície "*y*" de uma parcela de terreno quadrada de lado "*x*". A medida do lado tem um erro implícito, que pode ser acidental, instrumental o uma combinação de ambos. Admite-se para o exemplo que o lado mede 8.0 m e que o erro é de 1.0 m.

Assim apresentado o problema, o valor da superfície mede 64.00 m^2.

O problema é estimar seu erro. Na Figura 2 se representa a função superfície, com variável independente lado (*x*) e variável dependente superfície (*y*).

O erro na medida do lado - eixo X - se interpreta como o raio de um entorno do valor nominal, em cujo interior fica o valor do lado com uma determinada probabilidade.

Projetando o entorno sobre a curva ao eixo Y, se obtém outro entorno que representa o erro da superfície. Se Observar a figura pode-se estimar perto dos 15 m^2.

Em casos usuais o erro ficará pequeno e se pode substituir a curva pela reta tangente no ponto em estudo.

O quociente entre os erros em "Y" e o erro em "X" será a declividade da curva no ponto de estudo, ou seja, a derivada matemática da função no ponto:

$e_y = \frac{dy}{dx} e_x$ e no caso em estudo é: $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow e_y = 2x * e_x$

Onde:

$e_y =$ Erro no eixo y

$e_x =$ Erro no eixo x

$\frac{dy}{dx} =$ Derivada no ponto

De maneira mais geral, num processo de cálculo se tem mais de duas variáveis. Ampliando o caso em estudo; se a parcela fosse retangular, a superfície seria função de duas variáveis: à frente "a" em metros e o fundo "*b*" em metros.
A medida feita para cada variável *"a"* e *"b"*, tem um erro, que se propaga ao valor da superfície $S = a \times b$. A influência do erro de cada lado sobre o erro da superfície terá uma expressão semelhante a já vista.

Então é natural que o erro total da função “S” -área- seja a soma das contribuições parciais de cada uma das variáveis -*a* e *b*- da função, ou seja, deve-se trabalhar com o conceito das derivadas parciais que se ajustam ao problema:

$$e_S = \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right| e_a + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right| e_b$$

Nota: o uso do valor absoluto dos termos é para evitar a compensação por sinais.

Deve-se observar que as expressões são validas seguindo algumas hipóteses:

- O erro de cada variável é muito menor que a própria variável;
- As variáveis são independentes; o valor de cada um delas não afeta ao valor das outras.

Para o caso de uma função geral de *n* variáveis, $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode-se generalizar a equação previa como segue:

$$e_z = \sum_{i=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| e_{xi} \right]$$

E logo passando ao desvio padrão:

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^2 \sigma_i^2 \right]$$ ou para a mostra: $$s_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^2 s_i^2 \right]$$

Resultados semelhantes ao que se obtiver trabalhando a partir da série de Taylor.

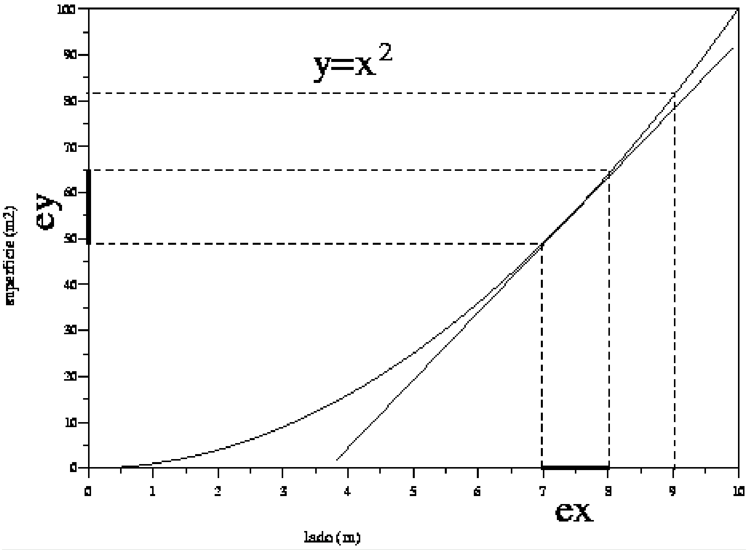

Figura 2 : Função da superfície de um quadrado

3 Estabelecimento dos problemas

Os problemas a ter em conta para este trabalho são o transporte de coordenadas pelo método de levantamento por coordenadas polares e o calculo de áreas por coordenadas de Gauss, pelo fato de ser os métodos mais usuais dos trabalhos de levantamentos cadastrais.

3.1.Transporte de coordenadas por levantamento polar

Os levantamentos por meio das coordenas polares, mesmo sendo um método clássico de trabalho de campo é de uso e costume na área de Topografia; em geral é o método usado quando se trabalha com estações totais, pode-se usar com teodolito e trena. Este método também é usado conjuntamente com a tecnologia de posicionamento satelital como o GPS, por exemplo.

Analisa-se aqui o processo básico de cálculo, independente da forma de se obter os dados, sejam por medição direta ou por cálculos prévios.

3.1.1. Apresentação do problema

O caso no levantamento polar no campo define um modelo matemático simples, no qual as variáveis envolvidas (Figura 3) são:

- As coordenadas da estação E(ye; xe);
- A distância terreno d=PE;
- Ângulo horizontal da medição α (azimute);
- Ângulo vertical da medida: β.

As incógnitas são as coordenadas do ponto levantado P(yp; xp).

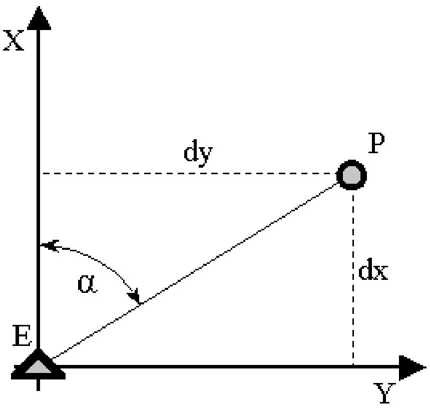

Figura 3 : Esquema do levantamento polar

Assim, o modelo matemático geral resultado:

$$y = ye + d\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$x = xe + d\cos\beta\cos\alpha$$

Cada dado poderá se obter de maneira direta ou indireta, o que afetará ao valor dos desvios padrão próprios de cada dado.

3.1.2. Analise da propagação dos erros

Baseando o trabalho no princípio de superposição de pequenos efeitos, pode-se estudar o erro sobre cada eixo, para finalmente se determinar o erro total e sua propagação.

Iniciando com as fórmulas das abscissas:

$y = ye + d\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha$ Fórmula de base.

ye d β α Variáveis.

σye σd σv σh Desvios padrões de cada variável.

De acordo com a expressão da propagação de erros já vista:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial y_E}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_h^2$$

E, desenvolvendo as derivadas parciais de primeira ordem é:

$$\sigma_y^2 = \sigma_e^2 + \sigma_d^2 \cos^2\beta\,\mathrm{sen}^2\alpha + \sigma_v^2 d^2\,\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\alpha + \sigma_h^2 d^2 \cos^2\beta\cos^2\alpha$$

Mais como pode-se supor, em geral que $\sigma v = \sigma h = \sigma\alpha$, então:

$$\sigma_y^2 = \sigma_e^2 + \sigma_d^2 \cos^2\beta\,\mathrm{sen}^2\alpha + \sigma_\alpha^2 d^2\left(\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\beta\cos^2\alpha\right)$$

De maneira semelhante, pode-se deduzir para as ordenadas que:

$$\sigma_x^2 = \sigma_e^2 + \sigma_d^2 \cos^2\beta\cos^2\alpha + \sigma_\alpha^2 d^2\left(\mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha + \cos^2\beta\,\mathrm{sen}^2\alpha\right)$$

Finalmente a resultante do desvio padrão pode-se calcular por aplicação do Teorema de Pitágoras, pelo fato de se calcular as componentes sobre os eixos:

$$\sigma_p^2 = \sigma_y^2 + \sigma_x^2$$

Pelas expressões anteriores resulta:

$$\sigma_p^2 = 2\sigma_e^2 + \sigma_d^2\cos^2\beta + \sigma_\alpha^2 d^2$$

Onde as variáveis indicam:

Desvios padrões:

σ_p = Ponto levantado

σ_e = Ponto estação

σ_d = Medida linear

σ_a = Medidas angulares

Medições:

β = Ângulo vertical da medição da distância

d = Distância medida estação-ponto

Note-se que o valor do azimute não forma parte da expressão do desvio padrão.

3.1.3. Estudo do caso

Como estudo dos casos, se exemplificam, tendo em conta três grupos de distâncias - curtas, médias e longas - apenas para definir grupos de níveis de trabalho, e se fixarem os desvios padrões das medições, calculando assim os diferentes desvios padrões dos pontos levantados:

Os dados considerados, tendo em conta esse três tipos de distâncias - curtas, medias e longas - com relação ao cadastro técnico imobiliário, são as fixadas na tabela 1. Os desvios padrões adotados para o exemplo podem-se visualizar na tabela 2.

Considera-se para o exemplo que as medições lineares sejam horizontais. Com todo isto, os resultados dos cálculos baseados na expressão definida para os desvios padrão, fixados como exemplos são os apresentados na tabela 3.

Tabela 1 : Tipos de distancia

Tipo de distancias	Extremos fixados	Definido para exemplo
Curtas	Menos de 500m	50m e 500m
Medias	Entre 500 aos 2000m	1000m
Longas	Mais de 2000m	5000m

Tabela 2 : Desvios adotados

Desvios padrões	Medições
σ_e =	0,10m
σ_d =	0.05m
σ_a =	20" e 05"

Tabela 3 : Resultados de calculo

Distancia de	σ_p do ponto levantado	
	$\sigma_a = 20"$	$\sigma_a = 5"$
50 m	0.15 m	0.15 m
500 m	0.16 m	0.15 m
1000 m	0.18 m	0.15 m
5000 m	0.51 m	0.19 m

Observa-se nos resultados que a precisão do ponto levantado é diminuída com respeito ao ponto estação, dependendo da distância e da precisão angular.

3.2 Cálculo das áreas por Gauss

O cálculo da área de um polígono tendo como dados as coordenadas dos vértices é o processo de cálculo tradicional, não só pela sua simplicidade mas pela possibilidade de permitir fazer o controle do cálculo, questão importante que leva segurança aos profissionais.

3.2.1 Apresentação do problema

O cálculo das áreas através das coordenadas dos vértices deve-se ao matemático Gauss, e os dados necessários para seu calculo (Figura 4) são:

- Abscissas de cada ponto do polígono da parcela
- Ordenada dos mesmos pontos

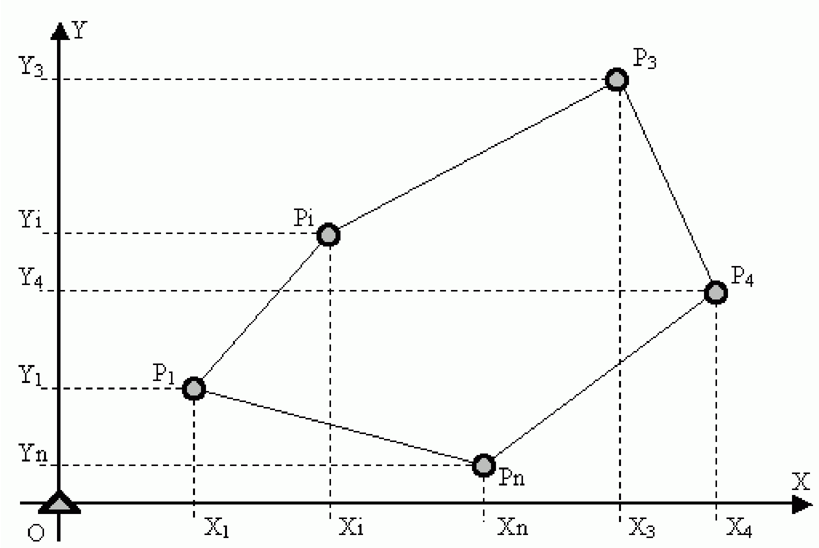

Figura 4 : Esquema das coordenadas para o calculo da área

A partir do esquema da figura 4, a fórmula para o cálculo de uma área por Gauss é a seguinte:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\{[y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \ldots + y_n(x_1 - x_{n-1})]\}$$

3.2.2.Análise da propagação dos erros

Utilizando a fórmula de Gauss para o cálculo de área de uma poligonal fechada, e para se determinar o desvio padrão da área σ_A se considerará que o desvio padrão das componentes X e Y dos pontos do polígono da parcela sejam iguais, então $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$.

Segundo a teoria já vista, o primeiro a calcular são as derivadas parciais da função em relação a todas as variáveis, no eixo *X* e no eixo *Y*. Assim:

Para o eixo *X*:

$$\frac{\partial F}{\partial X(x_1)} = (y_n - y_2); \frac{\partial F}{\partial X(x_2)} = (y_1 - y_3); \frac{\partial F}{\partial X(x_3)} = (y_2 - y_4); \ldots; \frac{\partial F}{\partial X(x_n)} = (y_{n-1} - y_1)$$

E, para o eixo *Y*:

$$\frac{\partial F}{\partial X(y_1)} = (x_2 - x_n); \frac{\partial F}{\partial X(y_2)} = (x_3 - x_1); \frac{\partial F}{\partial X(y_3)} = (x_4 - x_2); \ldots; \frac{\partial F}{\partial X(y_n)} = (x_1 - x_{n-1})$$

Mas considerando a fórmula do erro médio quadrático como:

$$\sigma_F^2 = a_{X1}^2\sigma_X^2 + a_{X2}^2\sigma_x^2 + \ldots + a_{Xn}^2\sigma_x^2 + a_{Y1}^2\sigma_y^2 + a_{Y2}^2\sigma_y^2 + \ldots + a_{Yn}^2\sigma_y^2$$

Onde:

$$a_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \Rightarrow a^2{}_{x_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \quad \text{e} \quad a_{y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \Rightarrow a^2{}_{y_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)^2$$ são coeficientes, e:

σ_X, σ_Y São os desvios padrão das medições nos eixos X e Y respectivamente.

Então resulta:

$$\sigma_F^2 = \left(a_{X1}^2 + a_{X2}^2 + \ldots + a_{Xn}^2\right)\sigma_x^2 + \left(a_{Y1}^2 + a_{Y2}^2 + \ldots + a_{Yn}^2\right)\sigma_Y^2$$

E logo, fazendo:

$$a_1^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{Xi}^2 \quad \text{e} \quad a_2^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{Yi}^2$$

Resulta finalmente: $\sigma_F^2 = a_1^2\sigma_x^2 + a_2^2\sigma_Y^2$

Ainda pela consideração que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$

Então a expressão do erro médio quadrático toma o seguinte aspecto:

$$\sigma_F^2 = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\sigma^2$$

Ou, como uma fórmula generalizada:

$$\sigma_F^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{Xi}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{Yi}^2\right) \cdot \sigma^2$$

3.2.3 Estudo do caso

- Considerações sobre a geometria da figura e o número de vértices

Aqui são abordadas várias situações relativas a área do polígono, é observado as influências que a precisão posicional do ponto, o número, dimensões e o sentido dos lados têm sobre os coeficientes a_1 e a_2 da expressão que calcula o desvio padrão resultante.

Efetuam-se estudos para se chegar à precisão posicional e tolerância ideal, que satisfaçam a legislação vigente no Código Civil brasileiro, e os interesses dos proprietários na identificação física-cartorial-registral do imóvel e evitar constantes retificações que envolvam procedimentos judiciários.

Considerar-se-á parcelas agrárias de 5 ha, que são as dimensões parcelares definidas pelo INCRA, como menor módulo rural, para maioria das regiões brasileiras.

O GGT-UFSC trabalhou com alguns valores para precisão posicional e tolerância e chegou a valores, devidamente justificados e aqui apresentados:

- Precisão posicional 0,5 m para pontos discretos do polígono que delimita a área;
- Tolerância dessa precisão de 3,00 m, devendo 95% dos pontos satisfazer a essa condição.

- Polígono de quatro vértices - lados com dimensões semelhantes

Coordenadas do caso (em metros):

P1 (200,00; 350,00)
P2 (200,00; 600,00)
P3 (400,00; 600,00)
P4 (400,00; 350,00)

Seja o cálculo da área dada por Gauss:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\{[y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \ldots + y_n(x_1 - x_{n-1})]\}$$

E com os dados do caso:

$$A = \frac{1}{2}[350(200-400) + 600(400-200) + 600(400-200) + 350(200-400)] = 50.000m^2$$

Fazendo os cálculos dos coeficientes a_{1x} e a_{2x} através das derivadas parciais, resultam:

$$a^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{x_i} = a^2{}_{x_1} + a^2{}_{x_2} + a^2{}_{x_3} + a^2{}_{x_4} = 62.500\mathrm{m}^2$$

$$a^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{y_i} = a^2{}_{y_1} + a^2{}_{y_2} + a^2{}_{y_3} + a^2{}_{y_4} = 40.000m^2$$

Considerando a precisão posicional de 0,5 m e as considerações já feitas:

$$\sigma_{F(A)}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a^2{}_{xi} + \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{yi}\right) \cdot \sigma^2 = \left[(62.500 + 40.000) * 0.50^2\right]m^4 \Rightarrow \sigma_{F(A)} \pm 160,08m^2$$

E, finalmente levando esse valor a função primitiva:

$$F(A) = A + \sigma_{F(A)} = 50.000m^2 \pm 160m^2$$

- Polígono de seis vértices - lados com dimensões discrepantes

Coordenadas do caso (em metros):

P1 (200,00; 350,00)
P2 (200,00; 375,00)
P3 (1200,00; 375,00)

P4 (2200,00; 375,00)
P5 (2200,00; 350,00)
P6 (1200,00; 350,00)

Fazendo os cálculos da área por Gauss, o resultado é o mesmo que o anterior, 5 ha.

Logo o cálculo dos coeficientes a_{1X} e a_{2X} através das derivadas parciais resulta.

$$a^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{x_i} == 625\text{m}^2$$

$$a^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{y_i} = 3.000.000 m^2$$

E, considerando a mesma precisão posicional:

$$\sigma^2_{F(A)} = \left(\sum_{i=1}^{n} a^2{}_{xi} + \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{yi} \right) \cdot \sigma^2 = \left[(625 + 3.000.000) * 0.50^2 \right] m^4 \Rightarrow \sigma_{F(A)} = \pm 866{,}12 m^2$$

E, finalmente levando esse valor a função primitiva:

$$F(A) = A + \sigma_{F(A)} = 50.000 m^2 \pm 866 m^2$$

- Polígono de oito vértices – lados com dimensões semelhantes

Coordenadas do caso (em metros):

P1 (200,00; 350,00)
P2 (200,00; 475,00)
P3 (200,00; 600,00)
P4 (300,00; 600,00)
P5 (400,00; 600,00)
P6 (400,00; 475,00)
P7 (400,00; 350,00)
P8 (300,00; 350,00)

Fazendo os cálculos da área por Gauss, o resultado é o mesmo que o anterior, 5 ha.

Logo o cálculo dos coeficientes a_{1X} e a_{2X} através das derivadas parciais resulta.

$$a^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{x_i} == 46.875\text{m}^2$$

$$a^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{y_i} = 30.000 m^2$$

E, considerando a mesma precisão posicional:

$$\sigma^2_{F(A)} = \left(\sum_{i=1}^{n} a^2{}_{xi} + \sum_{i=1}^{n} a^2{}_{yi} \right) \cdot \sigma^2 = \left[(46.875 + 30.000) * 0.50^2 \right] m^4 \Rightarrow \sigma_{F(A)} = \pm 138{,}63 m^2$$

E, finalmente levando esse valor a função primitiva:

$$F(A) = A + \sigma_{F(A)} = 50.000 m^2 \pm 139 m^2$$

Em resumo, pode-se indicar que as dimensões da parcela e a quantidade de lados têm influência no resultado da propagação dos erros sobre a área, como se observa na tabela 4.

Tabela 4 : Resultados de calculo

Caso	Num. vertices	Lados	$\sigma_{F(A)}(m^2)$
1	4	Semelhantes	160
2	6	Discrepantes	866
3	8	Semelhantes	139

4 Considerações finais

A análise dos erros cometidos ou cometer-se-á utilizando a lei da propagação dos erros por o estudo da variância é uma ferramenta para a tomada de decisões no nível da definição de métodos, equipamentos e resultados esperados nas variadas atividades da engenharia que tem que trabalhar com medições.

- Os valores das precisões de pontos levantados por coordenadas polares diminuem na metade ou mais da precisão do ponto estação (Tabela 3). Este fato indica que se deva ter precaução na seleção dos instrumentos de medida e os métodos de trabalhos e, sobretudo na precisão angular do instrumento para distâncias longas. Ainda outra recomendação que surge deste é não fazer trabalhos só de um ponto, pois não se pode controlar a precisão.

- No experimento do cálculo de áreas por Gauss, pode-se verificar que tem influência na propagação dos erros a disparidade entre as dimensões dos lados - forma - que compõem o polígono (Tabela 4, casos 1 e 2), e ainda em polígonos de semelhante forma e dimensões concordantes, a quantidade de lados que tenha (Tabela 4, casos 1 e 3).

- O GGT-UFSC pesquisou alguns valores para precisão posicional e tolerância e chegou a resultados, devidamente justificados, apresentados neste trabalho:

Precisão posicional de 0,5 m;
Tolerância da precisão desse ponto de 3,00 m.

Com estes valores é garantidas a precisão posicional do ponto – limite de propriedade - situado em uma área com dimensões de um módulo fiscal, e, concomitantemente, satisfeita a legislação vigente no código civil de uma tolerância de 5% para mais ou para menos nas determinações das áreas. Considerando o 5% de 5 ha (2500 m²), em todas as simulações efetuadas, na situação extrema, com o lado maior medindo 40 m dos lados, chegou-se a um desvio padrão de 870 m².

Observe que os valores encontrados são bastante satisfatórios em relação ao valor tolerado no código civil. O grupo de trabalho teve o cuidado de analisar a precisão posicional da determinação do ponto, que, com a tecnologia moderna do posicionamento espacial por satélite – GPS ou GLONASS p. ex – e auxiliado pela moderna Rede de monitoramento contínuo, chega-se à precisão pontual de 0,5 m, sem dificuldade, às regiões mais longínquas do Brasil. Considera-se também que com a melhoria temporal da RBMC (Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo) e das novas tecnologias, obtém-se esses níveis de precisão e tolerância mais simplesmente e que tendem a melhorar com o tempo.

5 Bibliografia

Gazdizcki, J.; WAHL, B.: *El cálculo geodésico de compensaciones: un enfoque moderno.* Maracaibo. Ed. Universidad de Zulia, 1978.

Gemael, C.: *Introdução ao ajustamento de observações, Aplicações geodésicas.* Curitiba (PR) Brasil. Ed. UFPR, 1997.

Frank Ayres Jr.: *Equações Diferenciais – Coleção Schaum*. São Paulo (SP) Brasil. Ed. McGraw – Hill Ltda., 1992.

Witte, B.; Schmidt, H.: *Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen.* Neuarbeitete Auflage – Stuttgart: Wittwer, 1995.

Wokowski, S.; Earl W.: *Cálculo con Geometria Analítica*. Madrid, España. Ed. McGraw-Will, 1926.

Gemael, C.: *Introdução ao Ajustamento das Observações: Aplicações Geodésicas.* Curitiba (PR) Brasil. Ed. UFPR, 1994.