# Ajustamento Livre e Cadastro

**Prof. Dr. Antônio Simões Silva** [1]
**Profª. Drª. Verônica Maria Costa Romão** [2]

[1] UFV – Depto. de Engenharia Civil
36570-000 Viçosa MG
asimoes@mail.ufv.br

[2] UFPE – Depto. de Engenharia Cartográfica
50740-530 Recife PE
vcosta@npd.ufpe.br

**Conteúdo**



***Resumo:*** *Com a normatização do cadastro através da NBR 14166 e da Lei 10267 o georeferenciamento torna-se uma exigência. Com a nova tecnologia GPS as redes de referência secundárias podem apresentar exatidão superior aos pontos de controle do Sistema Geodésico Brasileiro. Assim torna-se conveniente usar nesses casos o ajustamento livre para evitar a degradação da rede secundaria.Como o ajustamento livre usando inversas generalizadas tem abordagem matemática sofisticada apresentamos neste trabalho um método de ajustamento livre em que não explora o uso das matrizes inversas generalizadas.*

***Palavras chave:*** *ajustamento livre, redes de referência*

***Abstract:*** *The regulation of the cadastre trough NBR 14166 and Lei 10267 has enforced the geo-referencing. Using new technology such GPS the derived reference networks can be better than those of the Brazialian Geodetic System. Sometimes is more convenient to use free adjustment method to avoid degradation of the secondary network. The generalized inverse matrix for solving free adjustment is a hard task. This paper shows a free adjustment method which does not use the generalized inverse matrices.*

***Keywords:*** *free adjustment; reference networks*

## 1 Introdução

Com "as modernas tecnologias de medições geodésicas e topográficas, como a taqueometria eletrônica e o GPS, as redes de referência para o cadastro municipal podem apresentar exatidão superior aos pontos de controle da SGB. Desta forma, a rede municipal deve ser ajustada livremente, independente da rede nacional, sem a fixação (sem erros) das coordenadas dos pontos de amarração da SGB, considerando apenas uma direção e um ponto fixo como injunção para posterior transformação à rede nacional" (Romão,2002) A partir dessa afirmação insere-se a idéia de ajustamento de observações para os levantamentos cadastrais.

O ajustamento de observações tradicionalmente é feito de maneira convencional, aqui chamado assim em oposição ao ajustamento livre. O ajustamento livre é aquele em que as restrições ou injunções iniciais (um ponto com coordenadas conhecidas, uma direção conhecida e uma escala) não necessariamente estão presentes. A ausência dessas restrições faz com que o ajustamento quando resolvido de maneira tradicional não tenha solução. Isto porque a matriz normal ( $A^TPA$) torna-se singular, sem condição de ser invertida. Para levantar a singularidade da matriz normal usam-se as injunções supracitadas. Quando por alguma razão isto não é possível, ou propositadamente não se quer introduzir estas restrições, resolve-se o ajustamento com outros métodos tais como: inversas generalizadas e injunções internas.

O uso de matrizes inversas generalizadas em levantamentos topográficos tem trazido dificuldades computacionais porque as observações não são do mesmo tipo. Em aerotriangulações fotogramétricas, bons resultados foram obtidos (Moura,1980), talvez porque o tipo de observação é homogêneo (coordenadas fotográficas). Para problemas onde há vários tipos de observações: ângulos, distâncias, posições etc, sugere-se outra abordagem: isto é, o uso de matrizes regulares, com algumas injunções que removam a sua singularidade.

## 2 Modelos Matemáticos

O número de elementos que definem um datum de uma rede de levantamento depende da dimensão desta rede (se uma, duas ou três dimensões). Para uma rede de duas dimensões este número é 4 (duas posições , uma escala e uma orientação). Para remover a singularidade da matriz, é necessário adicionar um conjunto de equações que podemos chamar de equações de injunção. Uma outra maneira de remover a singularidade é através das injunções internas.

Esta abordagem tem como base um conjunto de equações de injunções mínimas que descrevem relações funcionais entre as correções das coordenadas aproximadas.

Se considerarmos uma rede plana onde somente ângulos horizontais tenham sido observados, esta nos dará uma rede horizontal em que as injunções necessárias são:

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_n & -X_n \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_n & Y_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

As primeira e segunda linhas referem-se à injunção de posição e são derivadas assumindo a condição de que o centróide da rede permaneça constante. A terceira linha refere-se à injunção de rotação e é derivada assumindo a condição de que a média dos azimutes do centróide da rede permaneça constante para cada ponto. A quarta linha se refere à injunção de escala e é derivada assumindo a condição de que a média das distâncias do centróide da rede para cada ponto, permaneça constante.

O datum da rede é definido através dos valores aproximados das coordenadas. É somente nesta fase que entram as coordenadas dos vértices pertencentes ao Sistema Geodésico Brasileiro, em que a partir delas calculam-se as coordenadas aproximadas dos vértices da rede de referência.

Com estas injunções o sistema toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A^T W A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T W L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

que tem a solução formada pelo conjunto de equações embutidas na matriz:

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T W A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T W L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ou

$$x = \left( A^T W A \right)^{+} A^T W L \qquad (4)$$

A equação matricial (4) usa a matriz inversa de Moore-Penrose para inverter a matriz normal. O algoritmo que é simbolizado pelo sistema (3) tem se mostrado mais eficiente (Cooper, 1987).

Durante o estudo desse método várias inversões foram feitas usando as inversas generalizadas. Estudou-se o método de Greville para computar a inversa de Moore-Penrose (Ben-Israel, 1974). Foi também explorado o método de Graybill que, como o anterior, se propõe a inverter a matriz de Moore-Penrose (Greville, 1966). Todas essas tentativas levaram a sofisticados algoritmos sem no entanto ter utilidade prática, uma vez que estes algoritmos são muito fracos se os dados forem heterogêneos. A melhor solução foi o uso das inversas regulares com as injunções já citadas, o que nos dá uma matriz bandada de fácil solução.

## 3 Teste e Comparações

Diversos testes foram efetuados para validar o algoritmo desenvolvido. Aqui apresentamos um levantamento típico daqueles usados para uma rede planimétrica É uma rede local e plana. Tem 9 estações onde foram observados 26 ângulos (com erro padrão 3,7 seg.) e 21 distâncias (erro padrão 1,2 mm). A fim de comparar o ajustamento livre com o ajustamento tradicional usou-se a rede descrita acima e que tem as seguintes coordenadas provisórias:

**Tabela 1** : Coordenadas provisórias

| Est. | N (m) | E (m) |
|---|---|---|
| 1 | 5405,351 | 5157,768 |
| 2 | 5461,101 | 5206,041 |
| 3 | 5427,761 | 5260,806 |
| 4 | 5373,232 | 5327,000 |
| 5 | 5327,809 | 5378,774 |
| 6 | 5310,482 | 5363,733 |
| 7 | 5284,278 | 5269,616 |
| 8 | 5295,713 | 5255,848 |

| | | |
|---|---|---|
| **9** | **5735,514** | **5241,254** |

O ponto 9 é o ponto datum para o ajustamento fixo.

Os resultados dos ajustamentos clássico e livre operados para uma mesma rede e mesmo conjunto de dados são mostrados nas tabelas a seguir:

**Tabela 2** : Resultados do Ajustamento Clássico

| Est | N (m) | d. p. | E (m) | d.p. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5405,352 | 0,2 | 5157,766 | 0,7 |
| 2 | 5461,150 | 0,7 | 5206,066 | 1,1 |
| 3 | 5427,760 | 0,8 | 5260,816 | 0,6 |
| 4 | 5373,220 | 1,1 | 5326,995 | 0,6 |
| 5 | 5327,836 | 2,0 | 5378,807 | 1,1 |
| 6 | 5310,473 | 1,8 | 5363,725 | 1,2 |
| 7 | 5284,274 | 1,0 | 5269,612 | 1,4 |
| 8 | 5295,716 | 0,8 | 5255,829 | 1,1 |
| 9 | 5375,514 | 0,0 | 5241,254 | 0,0 |

**Tabela 3** : Resultados do Ajustamento Livre

| Est | N (m) | d. p. | E (m) | d.p. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5405,336 | 0,7 | 5157,759 | 0,6 |
| 2 | 5461,139 | 0,5 | 5206,054 | 0.6 |
| 3 | 5427,754 | 0,6 | 5260,807 | 0,4 |
| 4 | 5373,218 | 0,5 | 5326,990 | 0,5 |
| 5 | 5327,839 | 0,7 | 5378,806 | 0,6 |
| 6 | 5310,474 | 0,6 | 5363,727 | 0,6 |
| 7 | 5284,267 | 0,8 | 5269,615 | 0,6 |
| 8 | 5295,709 | 0,6 | 5255,831 | 0,5 |
| 9 | 5375,505 | 0,5 | 5241,250 | 0,5 |

Analisando os resultados das tabelas 2 e 3 vemos que não há diferenças significativas.

## 4 Conclusão

Foi implementado um algoritmo para processar ajustamento livre sem usar as complicadas inversas generalizadas. Os diversos testes efetuados provam que o algoritmo tem funcionado a contento.

O ajustamento livre é conveniente sempre que a dependência de uma rede em relação a um ponto datum não seja aconselhável. O problema enfrentado nesse caso é que um bom conjunto de coordenadas aproximadas deverá estar disponível.

## 5 Bibliografia


- **Ben-Israel, A. & Greville, T. N. E.**. *Generalized Inverse: Theory and Applications*. Willey and Sons. N. York, 1974
- **Cooper, M.A.R**. *Control Surveys in Civil Engineering.* Collins,. London, 1987
- **Greville, F .A.** et alli,. Note on the Computation of the Generalized Inverse Of A Matrix. *SIAM Review* 8 (4) October, 1966
- **Moura, J. O**. *Pseudo -Inversa Aplicada A Fotogramentria*. Dissertação de mestrado. Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas. UFPr. Curitiba. Paraná, 1980
- **Romão, V. M. C.; Silva, T. F**.; Silva A S. A Lei 10267 e a Norma 14166: procedimento para o georrreferenciamento.In V Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário. Florianópolis, 06-10 Outubro de 2002
- **Silva, A. S**. *FRENET - Free Network Adjustment.* Internal Report. IESSG. University of Nottingham. U.K, 1990