

# Sistema de Projeção e Orientação das Plantas Topográficas

Silvio Jacks dos Anjos Garnés

Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
Centro Politécnico - Jardim das Américas  
81531-990 – Curitiba - PR  
✉ [sjgames@geoc.ufpr.br](mailto:sjgames@geoc.ufpr.br)

<b>Conteúdo</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Introdução</li> <li>2. Sistema de Projeção Topográfica ou Sistema Topográfico Local             <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1 Sistema de Projeção Azimutal Obliqua – Caso Perspectivo                 <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1.1 Sistema de Projeção Azimutal Obliqua Ortográfica</li> </ol> </li> <li>2.2 Transformação de Coordenadas                 <ol style="list-style-type: none"> <li>2.2.1 Transformação de Coordenadas Geodésicas Elipsoidais em Geodésicas Cartesianas Topocêntricas</li> <li>2.2.2 Transformação de Coordenadas Geodésicas elipsoidais em Topográficas</li> </ol> </li> <li>2.3 Convergência Meridiana</li> <li>2.4 Erros de posicionamento e orientação</li> </ol> </li> <li>3. Exemplo Prático</li> <li>4. Considerações Finais</li> <li>5. Referências Bibliográficas</li> </ol>
-----------------	---

**Resumo:** O levantamento e mapeamento das áreas rurais do país para fins de escrituração, em sua quase totalidade tem sido realizado pelo processo da poligonização topográfica e as plantas elaboradas com caracter apenas relativo. Só em casos eventuais, tais levantamentos eram amarrados ao Sistema Geodésico Brasileiro. Esforços conjunto da comunidade técnica culminaram na elaboração da norma – NBR 13133 Execução de levantamento topográfico – publicada em Maio de 1994. Tal norma trouxe grandes avanços, pois de certa forma faz com que haja uma homogeneização nos trabalhos topográficos realizados no país. No entanto, por ser uma norma, deixa de abordar importantes conceitos teóricos estabelecidos. Com este trabalho será resgatado conceitos sobre: sistema de projeção topográfica; convergência meridiana no sistema de projeção topográfica; efeito do erro da direção do norte na orientação das plantas; efeito do erro da posição geográfica na orientação das plantas. Para ilustrar os procedimentos, um exemplo prático será apresentado.

**Abstract:** The surveying and mapping of the rural areas of our country for register purpose, in almost its totality has been accomplished by the process of the topographical traverse and the maps just elaborated with relative character. Only in eventual cases, such surveying were tied to the Brazilian Geodesic System. Effort the technical community culminated in the elaboration of the norm - NBR 13133 Execution of topographical surveying - published 1994/May. Such norm brought great progresses, because in a certain way it allows an homogenization in the topographical works accomplished at the country. However, for being a norm, it doesn't mention important established theoretical concepts. To this work, it will be rescued concepts about: system of topographical projection; meridian convergence in the system of topographical projection; effect of the error of the direction of the north in the orientation of the maps; effect of the error of the geographical position in the orientation of the maps. To illustrate the procedures, a practical example is be presented.

## 1. Introdução

Os levantamentos topográficos são realizados sobre a superfície física da Terra através de instrumental tais como: teodolitos, trenas, medidores eletrônicos de distância, estações totais, rastreadores de sinais de satélites artificiais, entre outros.

Na representação desses levantamentos em planta, algum tipo de sistema de projeção é utilizado. Um tipo muito comum, principalmente para fins de Cadastro, é o sistema UTM (Universal Transversa de Mercator). Ocorre porém, que para aplicação deste sistema, as medidas realizadas na superfície devem ser reduzidas ao elipsóide e através de transporte de coordenadas são determinadas as coordenadas dos pontos levantados. Para ilustrar alguns dos efeitos das reduções a serem consideradas no sistema UTM, suponha uma distância de 100 m medida numa altitude de 1000 m próxima do meridiano central de um dos fuso UTM. A distância de 100 m quando reduzida ao elipsóide passa a ser de aproximadamente 99,984 m e quando reduzida ao sistema UTM passa a ser aproximadamente 99,944 m, ou seja, perde-se aí em torno de 6 cm só com reduções. Se a distância medida for de 1000 m só de reduções tem-se 56 cm aproximadamente. Outros sistemas baseados na projeção transversa de Mercator foram concebidos, por exemplo a RTM (Regional Transversa de Mercator) e a LTM (Local Transversa de Mercator), mas apesar de minimizarem os erros de projeção em si, não alteram o conceito da redução das observações ao elipsóide e para lugares de altitudes elevadas como no exemplo ilustrado a perda por redução continua ainda muita significativa.

Pensando nisto a comissão que elaborou a NBR 13133 introduziu no item (3.40) da referida norma, a definição do sistema de projeção topográfica ou sistema topográfico local, um dos assuntos a serem abordados neste trabalho. Também será abordado: convergência meridiana do sistema topográfico local, efeito do erro da direção norte na orientação das plantas e efeito do erro da localização geográfica onde este foi determinado.

## 2. Sistema de Projeção Topográfica ou Sistema Topográfico Local

Segundo consta na NBR 13133 (1994) o sistema topográfico local tem as seguintes características:

- a) as projetantes são ortogonais à superfície de projeção, significando estar o centro de projeção localizado no infinito;
- b) a superfície de projeção é um plano normal à vertical do lugar no ponto da superfície terrestre considerado como origem do levantamento, sendo seu referencial altimétrico referido ao datum vertical brasileiro;
- c) as deformações máximas inerentes a desconsideração da curvatura terrestre e a refração atmosférica tem as seguintes expressões aproximadas:

$$l \text{ (mm)} = - 0,004 l^3 \text{ (Km)}$$

$$h \text{ (mm)} = + 78,5 l^2 \text{ (Km)}$$

$$h' \text{ (mm)} = + 67,0 l^2 \text{ (Km) onde}$$

$l$  = deformação planimétrica devida a curvatura da Terra, em mm

$h$  = deformação altimétrica devida à curvatura da Terra em mm

$h'$  = deformação altimétrica devida ao efeito conjunto da curvatura da Terra e da refração atmosférica, em mm  $l$  = distância considerada no terreno, em Km

d) o plano de projeção tem a sua dimensão máxima limitada a 80 Km, a partir da origem de maneira que o erro relativo, decorrente da desconsideração da curvatura terrestre, não ultrapasse 1/35000 nesta dimensão e 1/15000 nas imediações da extremidade desta dimensão;

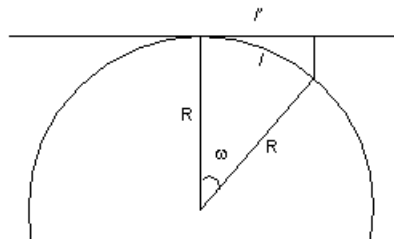
e) a localização planimétrica dos pontos, medidos no terreno e projetados no plano de projeção, se dá por intermédio de um sistema de coordenadas cartesianas, cuja origem coincide com a do levantamento topográfico;

f) o eixo das coordenadas e a referência azimutal, que, dependendo das peculiaridades do levantamento, pode estar orientado para o norte geográfico, para o norte magnético ou para um direção notável do terreno, julgada importante.

**Comentário:** no item (a), não é o centro de projeção que esta no infinito mas sim o *ponto de vista*, também conhecido por *ponto perspectivo*.

Julgou-se importante mostrar de onde vem as expressões do item (c) uma vez que estas não são tão imediatas.

**Determinação das expressões do Item (c) Deformação Planimétrica Devida a Curvatura Da Terra ( $l$ )**



**Fig. 1:** Deformação Planimétrica (D l)

Da (fig.1) tira-se

$$l' = R \text{ sen } \omega \text{ (2.1)}$$

$$l = R \omega \text{ (2.2)}$$

$$l = l' - l = R (\text{sen } \omega - \omega) \text{ (2.3)}$$

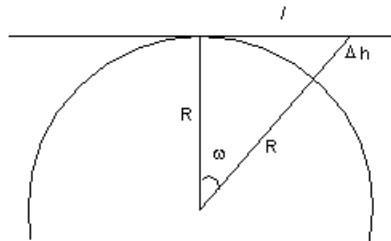
Considerando os dois primeiros termos do desenvolvimento em série da função  $\text{sen } \omega$ , isto é  $\text{sen } \omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \dots$  e substituindo em

$$(2.3) \text{ vem } l = R \left( \omega - \frac{\omega^3}{3!} - \omega \right) = - R \frac{\omega^3}{6} \text{ (2.4)}$$

$$\text{Elevando ao cubo a equação (2.2) e substituindo na (2.4) tem-se } l = - R \frac{l^3}{6 R^3} = - \frac{l^3}{6 R^2} \text{ (2.5)}$$

Tomando como valor médio para o raio da Terra  $R = 6\,371 \text{ Km}$ , chega-se a:  $l \text{ (mm)} \approx - 0,004 l^3 \text{ (Km)}$  (2.6)

ii) Deformação Altimétrica Devida a Curvatura Da Terra ( $h$ )



**Fig. 2:** Deformação Altimétrica (h)

Da (fig.2) tira-se

$$(R+h)^2 = R^2 + l^2 \quad (2.7)$$

$$h^2 + 2Rh - l^2 = 0 \quad (2.8)$$

A solução exata da equação (2.8) é

$$h = -R + \sqrt{R^2 + l^2} \quad (2.9)$$

Na literatura é frequentemente apresentada uma expressão aproximada obtida desprezando-se  $h^2$  na equação (2.8) face sua

pequenez em relação a  $R$ . Desta forma, tem-se  $h = \frac{l^2}{2R}$ . (2.10)

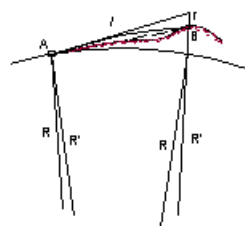
Tomando  $R = 6371 \text{ Km}$  e aplicando na equação (2.10) resulta

$$h(\text{mm}) \approx 78,5 l^2 (\text{km}) \quad (2.11)$$

iii) Deformação Altimétrica Devido ao Efeito Conjunto da Curvatura da Terra e da Refração Atmosférica ( $h'$ )

Segundo Martin (1983), na prática a trajetória da luz de um ponto a outro na superfície da Terra pode ser considerada circular. Chamando  $R'$  o raio desta trajetória, o efeito linear da refração  $r$ , pode ser obtido como segue. Do triângulo retângulo em A, (fig. 3) tira-se:

$$(R' + r)^2 = R'^2 + l^2 \therefore 2R'r + r^2 - l^2 = 0. \quad (2.12)$$



**Fig. 3:** Efeito da Refração (r)

Com as mesmas considerações feitas para a equação (2.8), uma solução aproximada é

$$r = \frac{l^2}{2R'} \quad (2.13)$$

Como o raio da trajetória da luz é desconhecido, utiliza-se como artifício fazer

$$2k = \frac{R}{R'} \therefore$$



$$X' = \frac{R \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha}{d + R \operatorname{cos} \gamma} \quad (2.1.8)$$

$$Y' = \frac{R \operatorname{sen} \gamma \operatorname{cos} \alpha}{d + R \operatorname{cos} \gamma} \quad (2.1.9)$$

As expressões  $\operatorname{cos} \gamma$ ,  $\operatorname{sen} \gamma \operatorname{cos} \alpha$ , e  $\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha$ , são obtidas aplicando as conhecidas fórmulas da trigonometria esférica: 4-elementos, 5-elementos e analogia dos senos respectivamente, ao triângulo esférico ( $P_NTP$ ), ver (fig.4).

*Aplicando a fórmula dos 4-elementos*

$$\operatorname{cos} \gamma = \operatorname{cos}(90-\Phi_0)\operatorname{cos}(90-\Phi) + \operatorname{sen}(90-\Phi_0)\operatorname{sen}(90-\Phi)\operatorname{cos}(\Lambda)$$

$$\operatorname{cos} \gamma = \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos}(\Lambda) \quad (2.1.10)$$

*Aplicando a fórmula dos 5-elementos*

$$\operatorname{sen} \gamma \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen}(90-\Phi_0)\operatorname{cos}(90-\Phi) + \operatorname{cos}(90-\Phi_0)\operatorname{sen}(90-\Phi)\operatorname{cos}(\Lambda)$$

$$\operatorname{sen} \gamma \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Lambda \quad (2.1.11)$$

*Aplicando a analogia dos senos*

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \Delta\Lambda} = \frac{\operatorname{sen}(90-\Phi)}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \therefore \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \Lambda \operatorname{cos} \Phi \quad (2.1.12)$$

Com as equações (2.1.10) à (2.1.12) e fazendo as substituições convenientes na equação (2.1.8) e (2.1.9) tem-se:

$$X' = \frac{R \operatorname{cos} \Phi \operatorname{sen} \Delta\Lambda}{d + R (\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)} \quad (2.1.13)$$

$$Y' = \frac{R (\operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)}{d + R (\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)} \quad (2.1.14)$$

As coordenadas acima correspondem as coordenadas do ponto P projetadas em um plano paralelo ao plano de tangência, e que

contém o centro da esfera. Para obter as coordenadas do plano tangente faz-se  $\frac{X}{X'} = \frac{d+R}{d}$ , e  $\frac{Y}{Y'} = \frac{d+R}{d}$ , donde

$$X = \frac{d+R}{d} X' \quad (2.1.15)$$

$$Y = \frac{d+R}{d} Y' \quad (2.1.16)$$

Substituindo (2.1.13) em (2.1.15) e (2.1.14) em (2.1.16) tem-se finalmente

$$X = \frac{R \operatorname{cos} \Phi \operatorname{sen} \Delta\Lambda (d+R)}{d + R (\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)} \quad (2.1.17)$$

$$Y = \frac{R (\operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda) (d+R)}{d + R (\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)} \quad (2.1.18)$$

As fórmulas acima são gerais para qualquer tipo de projeção azimutal perspectiva, sendo  $\Phi_0$ ,  $\Lambda_0$  as coordenadas astronômicas latitude e longitude respectivamente do ponto de tangência T. As coordenadas astronômicas  $\Phi$ ,  $\Lambda$ , são as coordenadas de um ponto P (qualquer ponto dentro do limite do sistema), o qual deseja-se obter as correspondentes coordenadas cartesianas X,Y, em uma projeção azimutal. O caso de interesse para este trabalho são as fórmulas de transformação para a projeção azimutal ortográfica.

### 2.1.1 Sistema de Projeção Azimutal Obliqua Ortográfica

Neste sistema o ponto de vista situa-se no infinito, as projetantes são ortogonais ao plano de projeção, isto implica colocar  $d=\infty$

- Levando este valor,  $d=\infty$ , em (2.1.17) e (2.1.18) estas ficariam indeterminadas.

Com o auxílio de limites, as coordenadas podem ser calculadas pela expressão

$$X = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{R \operatorname{cos} \Phi \operatorname{sen} \Delta\Lambda (d+R)}{d + R (\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)} \quad (2.1.21)$$

$$Y = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{R (\operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda) (d+R)}{d + R (\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Phi + \operatorname{cos} \Phi_0 \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} \Delta\Lambda)} \quad (2.1.22)$$

A indeterminação é retirada dividindo o numerador e o denominador do segundo membro das (2.1.21) e (2.1.22) por  $d$  e assim, pela solução dos limites tem-se:

$$X = R \cos \Phi \sin \Lambda, (2.1.23)$$

$$Y = R(\cos \Phi \cos \Phi \sin \Phi - \sin \Phi \cos \Phi \cos \Lambda). (2.1.24)$$

Segundo Richardus & Adler (1972, p.67) os coeficientes de deformação deste sistema são:

$m_0 = \cos \gamma$  (coeficiente de deformação meridiana)  $m_{90} = 1$  (coeficiente de deformação transversal)

## 2.2 Transformação de Coordenadas

### 2.2.1 Transformação de Coordenadas Geodésicas Elipsoidais em Geodésicas Cartesianas Topocêntricas

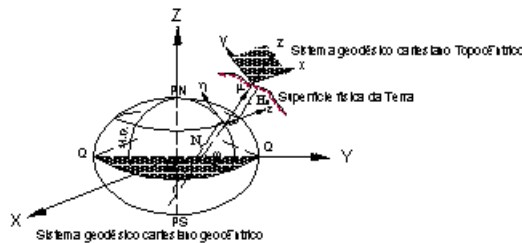


Fig. 5: Sistemas Geodésicos

O interesse na transformação das coordenadas do sistema geodésico elipsoidal nas coordenadas de um sistema geodésico topocêntrico está no fato da proximidade entre o sistema geodésico topocêntrico e o topográfico local. No geodésico topocêntrico a cota  $z$  é definida segundo a direção da normal do ponto origem do sistema e no sistema topográfico local a cota  $z$  é definida segundo a direção da vertical no ponto origem. Uma vez encontradas as fórmulas de transformação do sistema geodésico para o sistema geodésico topocêntrico, as fórmulas para transformação no sistema topográfico local são facilmente derivadas.

As fórmulas para transformação de qualquer ponto de coordenadas geodésicas elipsoidais ( $\varphi, \lambda, H$ ) em geodésicas cartesianas geocêntricas ( $X, Y, Z$ ) são facilmente deduzidas com o auxílio da (fig.5)

$$X = (N+H) \cos \varphi \cos \lambda (2.2.1)$$

$$Y = (N+H) \cos \varphi \sin \lambda (2.2.2)$$

$$Z = [(N(1-f)^2 + H) \sin \varphi] (2.2.3)$$

onde:

$N$  : raio de curvatura da seção primeiro vertical;

$H$  : altitude geométrica de um ponto na superfície da Terra;

$f$  : achatamento do elipsóide considerado;  $N(1-f)^2$  : pequena normal.

Seja  $\mathbf{u}$  um vetor de comprimento euclidiano unitário, e cuja direção é a direção da normal do ponto origem do sistema topocêntrico, sendo suas coordenadas elipsoidais denotadas por  $(\varphi_0, \lambda_0, H_0)$ . Este vetor pode ser deduzido da (fig.5) em função das coordenadas  $(\varphi_0, \lambda_0)$  como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ \sin \varphi_0 \end{bmatrix}, \text{ com } \|\mathbf{u}\|=1. (2.2.4)$$

Calculando a derivada parcial de  $\mathbf{u}$  em relação a  $\varphi_0$  e em relação a  $\lambda_0$  obtêm-se os seguintes vetores:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi_0} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ -\sin \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ \cos \varphi_0 \end{bmatrix}, \text{ com } \|\mathbf{n}\|=1; (2.2.5)$$

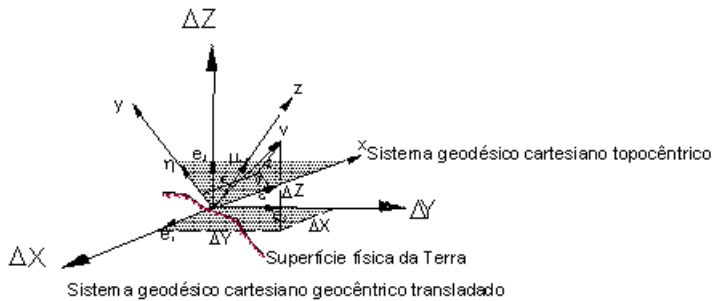
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_0} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_0 \\ \cos \lambda_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \|\boldsymbol{\varepsilon}\|=1. (2.2.6)$$

Observe que os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são ortogonais entre si (os produtos internos  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  e  $\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  são nulos) e geram o espaço tri-

dimensional. Além disso, a base ortogonal formada pelo terno cartesiano  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{u}$  forma um sistema destrógiro ( $\varepsilon \times \mathbf{n} = \mathbf{u}$ , onde  $\times$  indica o produto vetorial),  $\mathbf{n}$  tem sentido positivo para a direção norte e  $\varepsilon$  tem sentido positivo para a direção leste (a prova é  $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \varepsilon$ ). Enfim, os vetores  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{u}$  formam uma base para o sistema geodésico topocêntrico.

Denotando por  $X=X-X_0$ ,  $Y=Y-Y_0$ ,  $Z=Z-Z_0$ , um sistema paralelo ao sistema geocêntrico  $X,Y,Z$  cuja origem coincide com a do sistema geodésico topocêntrico  $x,y,z$ , e lembrando que estas coordenadas tem como base a base canônica, com vetores representantes,  $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0\ 1\ 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_3 = [0\ 0\ 1]^T$ .

### Matriz de mudança de base



**Fig. 6:** bases dos sistemas

Seja  $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  a base canônica do sistema  $X,Y,Z$  e seja  $\beta' = \{\varepsilon, \mathbf{n}, \mathbf{u}\}$  a base ortogonal do sistema geodésico topocêntrico  $x,y,z$ . Sendo  $\mathbf{v}$  um vetor deste espaço, então este pode ser escrito como combinação linear dos vetores de ambas as bases como:

$$\mathbf{v} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3, (2.2.7)$$

$$\mathbf{v} = x \varepsilon + y \mathbf{n} + z \mathbf{u}. (2.2.8)$$

Escrevendo os vetores da base canônica  $\beta$ , como combinação linear dos vetores da base  $\beta'$  tem-se

$$\mathbf{e}_1 = a_{11} \varepsilon + a_{21} \mathbf{n} + a_{31} \mathbf{u}, (2.2.9)$$

$$\mathbf{e}_2 = a_{12} \varepsilon + a_{22} \mathbf{n} + a_{32} \mathbf{u}, (2.2.10)$$

$$\mathbf{e}_3 = a_{13} \varepsilon + a_{23} \mathbf{n} + a_{33} \mathbf{u}. (2.2.11)$$

Substituindo estas últimas na (2.2.7) vem

$$\mathbf{v} = x (a_{11} \varepsilon + a_{21} \mathbf{n} + a_{31} \mathbf{u}) + y (a_{12} \varepsilon + a_{22} \mathbf{n} + a_{32} \mathbf{u}) + z (a_{13} \varepsilon + a_{23} \mathbf{n} + a_{33} \mathbf{u}). (2.2.12)$$

Fazendo o produto e reorganizando os termos

$$\mathbf{v} = (x a_{11} + y a_{12} + z a_{13}) \varepsilon + (x a_{21} + y a_{22} + z a_{23}) \mathbf{n} + (x a_{31} + y a_{32} + z a_{33}) \mathbf{u}. (2.2.13)$$

Comparando com a equação (2.2.8) conclui-se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, (2.2.14)$$

ou com representação compacta

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = [\mathbf{R}]^{\beta'} [\mathbf{v}]_{\beta} (2.2.15)$$

A matriz  $\mathbf{R}$  é a matriz de mudança da base  $\beta$  para a base  $\beta'$ . Para determinar os coeficientes da matriz  $\mathbf{R}$ , volta-se as expressões (2.2.9) à (2.2.11) e explicita-se os sistemas, por exemplo, considerando o sistema  $a_{11} \varepsilon + a_{21} \mathbf{n} + a_{31} \mathbf{u} = \mathbf{e}_1$  na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin \mu \cos \lambda & \cos \mu \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \mu \sin \lambda & \cos \mu \sin \lambda \\ 0 & \cos \mu & \sin \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. (2.2.16)$$

Por ser esta uma matriz ortogonal, a transposta é igual a inversa, além disso, ela é a mesma para os outros dois sistemas formados pelas equações (2.2.10) e (2.2.11). Resolvidos os três sistemas de equações lineares para os coeficientes  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  da matriz  $\mathbf{R}$ , esta resulta:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \lambda_b & \cos \lambda_b & 0 \\ -\operatorname{sen} \mu_b \cos \lambda_b & -\operatorname{sen} \mu_b \operatorname{sen} \lambda_b & \cos \mu_b \\ \cos \mu_b \cos \lambda_b & \cos \mu_b \operatorname{sen} \lambda_b & \operatorname{sen} \mu_b \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

Desta forma, as fórmulas para transformar as coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas para coordenadas geodésicas cartesianas topocêntricas são:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \lambda_b & \cos \lambda_b & 0 \\ -\operatorname{sen} \mu_b \cos \lambda_b & -\operatorname{sen} \mu_b \operatorname{sen} \lambda_b & \cos \mu_b \\ \cos \mu_b \cos \lambda_b & \cos \mu_b \operatorname{sen} \lambda_b & \operatorname{sen} \mu_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

a transformação inversa é obtida por

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \lambda_b & -\operatorname{sen} \mu_b \cos \lambda_b & \cos \mu_b \cos \lambda_b \\ \cos \lambda_b & -\operatorname{sen} \mu_b \operatorname{sen} \lambda_b & \cos \mu_b \operatorname{sen} \lambda_b \\ 0 & \cos \mu_b & \operatorname{sen} \mu_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

### 2.2.2 Transformação de Coordenadas Geodésicas elipsoidais em Topográficas

Conhecidas as coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, H_0)$  do ponto Datum (origem do sistema topocêntrico), através das equações (2.2.1) à (2.2.3) determina-se as correspondentes cartesianas  $X_0, Y_0, Z_0$  e com a (2.2.18) determina-se as coordenadas geodésicas cartesianas topocêntricas de qualquer ponto de coordenadas geodésicas  $(X, Y, Z)$  que esteja dentro do limite do sistema topocêntrico. Se forem conhecidas as coordenadas astronômicas  $(\Phi, \Lambda, \rho)$  do Datum, então a base ortogonal do sistema topográfico local será definida pelos vetores:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \Lambda_0 \\ \cos \Lambda_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \Phi_0 \cos \Lambda_0 \\ -\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Lambda_0 \\ \cos \Phi_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_0 \cos \Lambda_0 \\ \cos \Phi_0 \operatorname{sen} \Lambda_0 \\ \operatorname{sen} \Phi_0 \end{bmatrix},$$

e a transformação de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas para topográficas será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \Lambda_0 & \cos \Lambda_0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \Phi_0 \cos \Lambda_0 & -\operatorname{sen} \Phi_0 \operatorname{sen} \Lambda_0 & \cos \Phi_0 \\ \cos \Phi_0 \cos \Lambda_0 & \cos \Phi_0 \operatorname{sen} \Lambda_0 & \operatorname{sen} \Phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

sendo:  $X, Y, Z$  e  $X_0, Y_0, Z_0$  calculadas pelas (2.2.1) à (2.2.3) em função das coordenadas geodésicas elipsoidais  $(\varphi, \lambda, H)$ .

**Nota:** se a equação (2.2.20) for usada, o eixo  $y$  terá sentido positivo para norte e a direção  $z$  é a do meridiano astronômico passante pela origem do sistema topográfico, o eixo  $x$  terá orientação positiva para leste.

As relações entre grandezas astronômicas e geodésicas são dadas pelas seguintes expressões, ver Gemael, (1977).

*Equação de Laplace*

$$A = A_a - (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \varphi \quad (2.2.21)$$

onde:

$A, A_a$  : azimute geodésico e astronômico respectivamente;

$\lambda, \Lambda$  : longitude geodésica e astronômica respectivamente;

$\varphi$  : latitude geodésica.

*Componentes do desvio da vertical*

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (2.2.22) \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (2.2.23)$$

onde:

$\xi$  : componente meridiana do desvio da vertical;

$\eta$  : componente  $1^\circ$  vertical do desvio da vertical;  $i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  : desvio da vertical (ângulo formado entre a normal e a vertical num ponto).

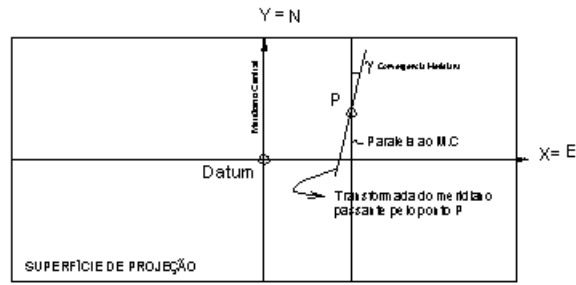
### 2.3 Convergência Meridiana

Nesta seção serão desenvolvidas as fórmulas para calcular a convergência meridiana para ambos os sistemas: projeção azimutal oblíqua ortográfica e sistema geodésico topocêntrico.

**Definição - Convergência meridiana de um ponto,**  $\gamma$  É o ângulo formado entre a direção da quadrícula e a direção da transformada do meridiano neste ponto.

Da (fig.7) obtém-se para a convergência meridiana do ponto P a expressão:

$$\gamma = \text{arc tg} \left( \frac{dx}{dy} \right) \quad (2.3.1)$$



**Fig. 7:** Convergência Meridiana

### **Convergência meridiana do sistema de projeção azimutal oblíqua ortográfica**

Voltando as expressões (2.1.23) e (2.1.24)

$$x = R \cos \Phi \sin \Lambda \quad (2.3.2) \quad y = R(\cos \Phi_0 \sin \Phi - \sin \Phi_0 \cos \Phi \cos \Lambda) \quad (2.3.3)$$

Diferenciando, resulta  $dx = -R \sin \Phi \sin \Lambda d\Phi + R \cos \Phi \cos \Lambda d\Lambda$  (2.3.4)

$$dy = (R \cos \Phi_0 \cos \Phi + R \sin \Phi_0 \sin \Phi \cos \Lambda) d\Phi + R \sin \Phi_0 \cos \Phi \sin \Lambda d\Lambda \quad (2.3.5)$$

Fazendo com que haja variação apenas em latitude, ou seja  $d\Lambda = 0$ , tem-se

$$dx = -R \sin \Phi \sin \Lambda d\Phi \quad (2.3.6)$$

$$dy = (R \cos \Phi_0 \cos \Phi + R \sin \Phi_0 \sin \Phi \cos \Lambda) d\Phi \quad (2.3.7)$$

Dividindo (2.3.6) por (2.3.7) vem  $\frac{dx}{dy} = - \frac{\sin \Phi \sin \Delta \Lambda}{\cos \Phi_0 \cos \Phi + \sin \Phi_0 \sin \Phi \cos \Delta \Lambda}$  (2.3.8)

Substituindo a (2.3.8) em (2.3.1) obtém-se uma expressão para calcular a convergência meridiana  $\gamma$ , em função das coordenadas astronômicas do ponto P ( $\Phi, \Lambda$ ) e do ponto de tangência T ( $\Phi_0, \Lambda_0$ ).

$$\gamma = \text{arc tg} \left( \frac{- \sin \Phi \sin \Delta \Lambda}{\cos \Phi_0 \cos \Phi + \sin \Phi_0 \sin \Phi \cos \Delta \Lambda} \right) \quad (2.3.9)$$

### **Convergência meridiana do sistema geodésico topocêntrico**

Da equação (2.2.18) tira-se

$$x = -\sin \lambda_0 X + \cos \lambda_0 Y \quad (2.3.10)$$

$$y = -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 X - \sin \varphi_0 \sin \lambda_0 Y + \cos \varphi_0 Z \quad (2.3.11)$$

Diferenciando cada uma das expressões acima tem-se:

$$dx = -\sin \lambda_0 dX + \cos \lambda_0 dY \quad (2.3.12)$$

$$dy = -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 dX - \sin \varphi_0 \sin \lambda_0 dY + \cos \varphi_0 dZ \quad (2.3.13)$$

Com as equações (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3) obtém-se

$$X = X - X_0 = (N+H) \cos \varphi \cos \lambda - X_0 \quad (2.3.14)$$

$$Y = Y - Y_0 = (N+H) \cos \varphi \sin \lambda - Y_0 \quad (2.3.15)$$

$$Z = Z - Z_0 = [N(1-e^2)+H] \sin \varphi - Z_0 \quad (2.3.16)$$

O diferencial da (2.3.14) calculado por

$$dX = \frac{\partial \Delta X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \Delta X}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \Delta X}{\partial H} dH \quad (2.3.17)$$

é alcançado após algumas operações pela seguinte expressão:

$$dX = -\cos\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi - Y d\lambda + \frac{X}{N+H} dH \quad (2.3.18)$$

De maneira semelhante os diferenciais dY e dZ são obtidos pelas seguintes expressões:  $dY = -\sin\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi - X d\lambda + \frac{Y}{N+H} dH$ , (2.3.19)

$dZ = \cos\varphi (M+H)d\varphi + \sin\varphi dH$ . (2.3.20) Substituindo as expressões dos diferenciais dX, dY e dZ nas (2.3.12) e (2.3.13) tem-se

$$dx = -\sin\lambda_0 [-\cos\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi - Y d\lambda + \frac{X}{N+H} dH] + \cos\lambda_0 [-\sin\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi - X d\lambda + \frac{Y}{N+H} dH], \quad (2.3.21)$$

$$dy = -\sin\varphi_0 \cos\lambda_0 [-\cos\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi - Y d\lambda + \frac{X}{N+H} dH] - \sin\varphi_0 \sin\lambda_0 [-\sin\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi - X d\lambda + \frac{Y}{N+H} dH] + \cos\varphi_0 [\cos\varphi (M+H)d\varphi + \sin\varphi dH]. \quad (2.3.22)$$

Colocando  $d\lambda = 0$  em (2.3.21) e fazendo algumas manipulações obtém-se  $dx = -\sin\lambda \sin\varphi (M+H)d\varphi + \sin\lambda \cos\varphi dH$ . (2.3.23)

Fazendo o mesmo para a equação (2.3.22) tem-se

$$dy = (\sin\varphi_0 \sin\varphi \cos\lambda + \cos\varphi_0 \cos\varphi)(M+H)d\varphi - (\sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda + \cos\varphi_0 \sin\varphi)dH. \quad (2.3.24)$$

Colocando dH em função da variação da latitude  $d\varphi$ , e com o auxílio da expressão (2.10) resulta:  $dx = (-\sin\lambda \sin\varphi + \frac{1}{2} \sin\lambda \cos\varphi)d\varphi (M+H)$  (2.3.25)

$$dy = [(\sin\varphi_0 \sin\varphi \cos\lambda + \cos\varphi_0 \cos\varphi) - \frac{1}{2}(\sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda + \cos\varphi_0 \sin\varphi)]d\varphi (M+H) \quad (2.3.26)$$

Dividindo a equação (2.3.25) pela (2.3.26) e lembrando da (2.3.1), a convergência meridiana para o sistema geodésico topocêntrico e consequentemente para o sistema topográfico local pode ser calculada pela expressão:  $\gamma = \text{arc tg}$

$$\left( \frac{-\sin\Delta\lambda \sin\mu^0 + \frac{1}{2} \cos\mu^0 \sin\Delta\lambda d\mu^0}{\sin\mu^0 \sin\mu^0 \cos\Delta\lambda + \cos\mu^0 \cos\mu^0 - \frac{1}{2}(\sin\mu^0 \cos\mu^0 \cos\Delta\lambda + \cos\mu^0 \sin\mu^0 d\mu^0)} \right). \quad (2.3.27)$$

Observe que  $d\varphi$  deve estar em radianos, assim para pequenas variações na latitude, as segundas parcelas do numerador e denominador terão pouca influência no cálculo da convergência meridiana e para certos casos, podem ser negligenciados. Se isto acontecer, a expressão (2.3.27) torna-se

$$\gamma = \text{arc tg} \left( \frac{-\sin\Delta\lambda \sin\mu^0}{\sin\mu^0 \sin\mu^0 \cos\Delta\lambda + \cos\mu^0 \cos\mu^0} \right), \quad (2.3.28)$$

que é a mesma (2.3.9) do sistema de projeção azimutal ortográfica deduzida anteriormente.

## 2.4 Erros de posicionamento e orientação

Suponha que o sistema topográfico local de uma determinada região já esteja definido, isto é, existe um ponto Datum materializado no terreno com as componentes do desvio da vertical e ondulação geoidal já determinados. Suponha ainda, que o número de pontos materializando o sistema sejam poucos, ou até mesmo, que não tenham sido implantados pontos além do ponto Datum. Neste caso, um transporte de coordenadas pode ser inviável ou mesmo não ser possível e dependendo da aplicação, se justifica determinar em um ponto de partida do levantamento, um azimute astronômico (determinado pelo sol ou estrelas) e a posição geográfica do ponto via GPS de navegação. Com a posição geográfica calcula-se a convergência meridiana no ponto de partida e com o azimute astronômico calcula-se o azimute de quadrícula. A seguir faz-se uma análise do efeito destes erros na orientação das plantas.

### i) Efeito do Erro do Posicionamento Geográfico na Orientação das Plantas Topográficas

O efeito do erro da posição geográfica de um ponto na orientação da planta topográfica pode ser analisado diferenciando por exemplo,

$$\text{a expressão da convergência meridiana (2.3.28)} \quad d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \mu^0} d\mu^0 + \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} d\lambda, \quad (2.3.29)$$

$$\text{o resultado é: } d\gamma = \frac{-\sin\Delta\lambda \cos\mu^0 d\mu^0 - (\sin\mu^0 \cos\Delta\lambda \cos\mu^0 \cos\mu^0 + \sin^2\mu^0 \sin\mu^0) d\Delta\lambda}{[(\cos\mu^0 \cos\mu^0 + \sin\mu^0 \sin\mu^0 \cos\Delta\lambda)^2 + \sin^2\mu^0 \sin^2\Delta\lambda] \sin 1''}. \quad (2.3.30)$$

O erro da convergência meridiana  $d\gamma$  é função da posição do ponto ( $\varphi, \lambda$ ) e do erro desta posição  $d\varphi$  e  $d\lambda$  no plano topográfico. Ao erro  $d\gamma$ , corresponde o erro da orientação de uma planta em relação a orientação do plano topográfico por causa do erro na determinação geográfica do ponto. *Obs.: Esta análise também poderia ser realizada aplicando a lei especial de propagação das*

covariâncias  $\sigma_r^2 = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \mu^0} \sigma_\mu \right)^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \sigma_\lambda \right)^2$ , sendo  $\sigma_r$  a variância da convergência meridiana e  $\sigma_\varphi$  e  $\sigma_\lambda$  os desvios padrões da latitude e longitude respectivamente.

### ii) Efeito do Erro da Direção do Meridiano

Infelizmente a NBR 13133 (1994) não é rigorosa em relação ao item (f) da definição do sistema topográfico local. Como está, a planta ou carta teria uma orientação "quase" arbitrária. Entende-se que o ideal em uma planta ou carta topográfica é que a direção do eixo coordenado de referência azimutal deva coincidir com a direção do meridiano (astronômico ou geodésico, conforme seja a definição da orientação do sistema topográfico) passante pelo Datum do sistema topográfico local. Com isto, pode ser obtida a

convergência meridiana de qualquer ponto dentro do sistema de projeção com o auxílio da fórmula (2.3.27).

Considere uma poligonal de quatro vértices definida dentro de um sistema de projeção topográfica, (fig.8), onde foram medidos, reduzidos ao plano da projeção e ajustados os ângulos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$  e as distâncias  $d_{12}, d_{23}, d_{34}$  e  $d_{41}$ . Determinando um azimute de partida  $AZ_{12}$  em relação ao norte de quadrícula do sistema e considerando um ângulo  $\varepsilon$ , o erro deste azimute, a poligonal ficará rotacionada e todas as coordenadas terão modificações. O efeito do erro do azimute nas coordenadas pode ser avaliado pelo seguinte procedimento. Tomando como exemplo o cálculo das coordenadas do ponto 2.

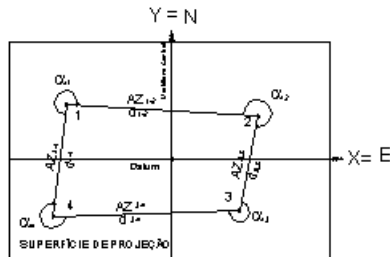
$$x_2 + dx_2 = d_{12} \text{sen}(AZ_{12} + \varepsilon) + x_1 \text{ (com erro no azimute)} \quad (2.3.31) \quad x_2 = d_{12} \text{sen}(AZ_{12}) + x_1 \text{ (sem erro no azimute)} \quad (2.3.32) \text{ onde:}$$

$\varepsilon$  : erro no azimute;

$dx_2$  : erro na coordenada  $x_2$  devido ao erro do azimute. Subtraindo a (2.3.32) da (2.3.31) tem-se

$$dx_2 = d_{12} [\text{sen}(AZ_{12} + \varepsilon) - \text{sen}(AZ_{12})],$$

$$dx_2 = d_{12} [\text{sen}(AZ_{12})\cos(\varepsilon) + \cos(AZ_{12})\text{sen}(\varepsilon) - \text{sen}(AZ_{12})].$$



**Fig. 8:** Poligonal topográfica

Considerando ser o erro em azimute  $\varepsilon$ , "pequeno", pode-se usar a seguinte aproximação

$$dx_2 = d_{12} [\text{sen}(AZ_{12}) + \cos(AZ_{12}) \varepsilon - \text{sen}(AZ_{12})]$$

$$dx_2 = d_{12} \cos(AZ_{12}) \varepsilon \quad (2.3.33)$$

De modo semelhante, o erro na coordenada,  $y_2$

$$y_2 = d_{12} \cos(AZ_{12}) + y_1 \quad (2.3.34)$$

$$\text{pode ser expresso por } dy_2 = -d_{12} \text{sen}(AZ_{12}) \varepsilon \quad (2.3.35)$$

Observe que o erro das coordenadas devido ao erro no azimute,  $\varepsilon$ , "pequeno", pode ser obtido diferenciando a expressão que fornece o valor da coordenada.

Como ilustração adicional, será verificado o erro da coordenada do ponto 4 ( $x_4, y_4$ ) usando diferenciação. Para a poligonal convexa do exemplo, (fig.8), as coordenadas do ponto 4 sem considerar o erro do azimute podem ser calculadas por:

$$x_4 = d_{34} \text{sen}(AZ_{12} + \alpha_2 + \alpha_3 - 360) + d_{23} \text{sen}(AZ_{12} + \alpha_2 - 180) + d_{12} \text{sen}(AZ_{12}) + x_1, \quad y_4 = d_{34} \cos(AZ_{12} + \alpha_2 + \alpha_3 - 360) + d_{23} \cos(AZ_{12} + \alpha_2 - 180) + d_{12} \cos(AZ_{12}) + y_1.$$

$$\text{Diferenciando tem-se } dx_4 = [d_{34} \cos(AZ_{12} + \alpha_2 + \alpha_3 - 360) + d_{23} \cos(AZ_{12} + \alpha_2 - 180) + d_{12} \cos(AZ_{12})] \varepsilon, \quad dy_4 = -[d_{34} \text{sen}(AZ_{12} + \alpha_2 + \alpha_3 - 360) + d_{23} \text{sen}(AZ_{12} + \alpha_2 - 180) + d_{12} \text{sen}(AZ_{12})] \varepsilon. \text{ ou}$$

$$dx_4 = (y_{12} + y_{23} + y_{34}) \varepsilon$$

$$dy_4 = -(x_{12} + x_{23} + x_{34}) \varepsilon$$

onde:  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$  : são as coordenadas parciais do alinhamento i-j;  $\varepsilon$  : erro no azimute em radianos.

### 3. Exemplo Prático

Neste exemplo o Datum do sistema topográfico local será considerado o vértice Chuá em Minas Gerais (Datum do Sistema Geodésico Brasileiro), os dados referente a este Datum são (Gemael, 1981):

Coordenadas astronômicas / Coordenadas geodésicas

$$\Phi = 19^\circ 45' 41.34'' \quad S_\phi = 19^\circ 45' 41.6527'' \quad S \quad \Lambda = 48^\circ 06' 07.80'' \quad W \quad \lambda = 48^\circ 06' 04.0639'' \quad W$$

Componentes do desvio da vertical / Ondulação geoidal

$$\xi = -0.31'' \quad \eta = 3.59'' \quad N = 0$$

O elipsóide do Sistema Geodésico Brasileiro é o elipsóide sul americano 1969 de parâmetros geométricos (Fischer,1973) :

$a = 6\,378\,160$  m (semi-eixo maior);  $f = 1/298,25$  (achatamento)

A altitude geométrica do vértice Chuá é  $H = 763,280$  m

**1ª parte:** Dadas as coordenadas geodésicas elipsoidais de quatro pontos na superfície física da Terra, calcular as correspondentes topográficas.

Tabela 01 – Coordenadas geodésicas elipsoidais

vértice	Latitude (S)	Longitude (W)	Altitude (m)
1	19° 35'26.51"	48° 27'06.71"	600,000
2	19° 37'36.01"	47° 48'48.48"	703,419
3	19° 55'24.41"	47° 52'34.67"	790,100
4	19° 56'29.16"	48° 29'48.58"	750,827

**Solução usando a projeção azimutal oblíqua ortográfica**

Assumindo ser constante o desvio da vertical para o plano topográfico, as coordenadas geodésicas são passadas à astronômicas usando as expressões:

$$\Phi = \varphi + \xi ; \Lambda = \lambda + \eta \sec(\varphi)$$

Tabela 02 – Coordenadas astronômicas

Vértice	Latitude (S)	Longitude (W)
1	19° 35'26.2"	48° 27'12.12"
2	19° 37'35.7"	47° 48'53.83"
3	19° 55'24.1"	47° 52'40.02"
4	19° 56'28.85"	48° 29'54.00"

Raio médio de curvatura no vértice Chuá

$$R = \sqrt{M} \sqrt{N} = 6\,361\,643,249\,8 \text{ m}$$

Com as fórmulas (2.1.23) , (2.1.24), calcula-se as coordenadas x, y e com a fórmula (2.3.9) a convergência meridiana. Os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 03 – Coordenadas na projeção azimutal oblíqua ortográfica

Vértice	x (m)	y (m)	C. M. ( $\gamma$ )
1	-36 736,789	18 934,124	-0° 07'03.922"
2	30 036,954	14 952,697	0° 05'47.298"
3	23 422,485	-17 989.035	0° 04'35.262"
4	-41 349,334	-20 018,880	-0° 08'06.416"

**Solução usando o sistema topocêntrico**

A partir dos dados da tabela 01, usando as equações (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3) obtêm-se as coordenadas geodésicas geocêntricas, apresentadas a seguir.

Tabela 04 – Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas

Vértice	X (m)	Y (m)	Z (m)
Chuá	4 010 615,308	- 4 470 080,981	- 2 143 140,500
1	3 987 229,527	- 4 499 199,974	- 2 125 272,339
2	4 036 349,565	- 4 453 576,470	- 2 129 058,614
3	4 024 061,724	- 4 449 815,323	- 2 160 007,950
4	3 975 159,490	- 4 492 599,224	- 2 161 866,642

Com as coordenadas geodésicas do vértice Chuá, calcula-se a matriz **R** de mudança de base (matriz de rotação) e com a equação (2.2.18) obtêm-se as coordenadas geodésicas cartesianas topocêntricas, com a equação (2.3.27) calcula-se a convergência meridiana. Os valores são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 05– Coordenadas cartesianas geodésicas topocêntricas

Vértice	x (m)	y (m)	z (m)	C. M. ( $\gamma$ )
1	-36 800,696	18 879,429	-297,492	-0° 07'04.74"
2	30 176,651	14 909,661	-148,735	0° 05'48.73"
3	23 542,269	-17 938,052	-41,968	0° 04'34.99"
4	-41 428,727	-19 962,051	-178,343	-0° 08'04.23"

Utilizando agora para determinar a matriz **R**, as coordenadas astronômicas do vértice Chuá e calculando a convergência com relação aos meridianos astronômicos, obtém-se as coordenadas topográficas dos vértices. O resultado é mostrado na tabela a seguir.

Tabela 06– Coordenadas topográficas

Vértice	x (m)	y (m)	z (m)	C. M. ( $\gamma$ )
1	-36 800,586	18 879,654	-296,837	-0° 07'04.74"
2	30 176,740	14 909,477	-149,227	0° 05'48.73"
3	23 542,158	-17 938,196	-42,396	0° 04'34.99"
4	-41 428,852	-19 962,797	-177,668	-0° 08'04.23"

**2ª parte:** Considere o ponto 1 como sendo o vértice inicial de uma poligonal a ser levantada dentro dos limites do sistema topográfico em questão. Considerando que a posição geográfica deste ponto foi determinada usando um receptor GPS de navegação com um erro de 10" (aproximadamente 300 m). Calcular qual a influência deste erro na convergência meridiana.

Solução:

Usando as equação (2.3.30) e levando em conta primeiro o erro só em latitude e depois só em longitude, chega-se a:  $d\varphi = 10''$ ,  $d\lambda = 0'' \Rightarrow d\gamma = 0,06$   $d\varphi = 0''$ ,  $d\lambda = 10'' \Rightarrow d\gamma = 3,35$

Conclusão: um erro de 300 m na posição geográfica é significativa no cálculo da convergência meridiana e portando um receptor GPS de navegação fornecendo coordenadas com este erro, não seria satisfatório para determinar o ponto de partida de um levantamento.

**3ª parte:** A tabela a seguir mostra os ângulos e as distâncias reduzidas e ajustadas ao plano topográfico. O azimute astronômico determinado (em relação ao norte) em campo do alinhamento 1-2 foi  $AZ_{12} = 93^{\circ}30'37.09''$ . Calcule qual o erro nas coordenadas do sistema topográfico, se a convergência meridiana não for considerada.

Tabela 07 – Valores calculados sem correção da convergência meridiana

Est	Ângulo	Azimute	Dist.	x	y	X	y
1	266° 35'49.61"	93° 30'37.09"	67 094,893	66 969,010	-4 108,087	-36 800,586	18 879,654
2	278° 01'36.01"	191° 32'13.11"	35 511,003	-6 702,208	-32 833,942	30 168,424	14 771,567
3	256° 47'49.35"	268° 20'02.45"	65 002,489	-64 975,012	-1 889,807	23 466,216	18 062,375
4	278° 34'45.03"	6° 54'47.48"	39 116,226	4 708,239	38 831,840	-41 508,796	-19 952,182

Os erros em relação as coordenadas corretas da tabela 06 são:

$$dx_1 = 0; dy_1 = 0; dx_2 = -8,316; dy_2 = -137,910; dx_3 = -75,942; dy_3 = -124,179; dx_4 = -79,944; dy_4 = 9,615$$

Usando as expressões diferenciais desenvolvidas no item (ii) da seção 2.4 os valores encontrados são:  $dx_1 = 0; dy_1 = 0; dx_2 = -8,175; dy_2 = -137,920; dx_3 = -75,815; dy_3 = -124,258; dx_4 = -79,982; dy_4 = 9,530$

Valores estes, bastante razoáveis em se considerando as distâncias entre os vértices.

## 4. Considerações Finais

Na seção 2 deste trabalho resgatou-se a definição do sistema de projeção topográfica ou sistema topográfico local conforme definido na *NBR13133(1994)*, demonstrou-se as expressões do item (c) desta definição e introduziu-se dois sistemas relacionados a definição dos itens (a), (b) e (e); o sistema de projeção azimutal oblíqua ortográfica (seção 2.1) e o sistema geodésico topocêntrico (seção 2.2), para ambos os sistemas foram desenvolvidas as expressões da convergência meridiana (seção 2.3). Sobre o item (f) da definição do sistema de projeção foram tecidos alguns comentários na seção (2.4 – item ii).

Durante o desenvolvimento deste trabalho e principalmente com os resultados apresentados no exemplo prático, chegou-se a conclusão que é fundamental a completa definição dos sistema de projeção topográfica, através dos parâmetros: coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda, H$ ) do Datum (ponto origem do sistema), componentes do desvio da vertical ( $\xi, \eta$ ), ondulação geoidal (N) e parâmetros do elipsóide (a, f).

Apesar do sistema de projeção azimutal oblíqua ortográfica estar de acordo com os itens (a),(b), e (e) da definição da norma, não recomenda-se que este seja adotado para realização dos cálculos, isto por não tratar o aspecto da altitude simultaneamente e por considerar esférica a aproximação da forma da Terra.

Pelo fato dos sistemas topográficos locais levarem ainda alguns anos para serem completamente implantados no País, recomenda-se amarrar qualquer tipo de medição ao Sistema Geodésico Brasileiro, ou quando para uma certa aplicação isto torna-se inviável, apontar na planta qual a posição geográfica do ponto onde determinou-se o azimute de partida (mesmo se este ponto for determinado

via GPS de navegação, veja conseqüências na seção 2.4). Este apontamento mais tarde servirá para orientar a planta em relação a um sistema topográfico local.

## 5. Referências Bibliográficas

**Fischer, I.:** *The Basic Framework of The South American Datum of 1969*, Washington, DoD: Defense Mapping Agency, Topographic Center, In: XII Pan American Consultation on Cartography – PIGH, Panamá, 1973, 18 p.

**Gemael, C.:** *Introdução à Geodésia Geométrica: 1ª parte*, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 1977.

**Gemael, C.:** *Referenciais Cartesianos Utilizados em Geodésia*, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 1981.

**Gemael, C.:** *Introdução à Geodésia Geométrica: 2ª parte*, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 1988.

**Martin, F. A.:** *Geodesia y Cartografía Matemática*, Madrid, Editorial paraninfo, 1983.

**NBR 13133:** *Execução de Levantamento topográfico*, ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Maio, 1994, 35 p.

**Richardus, P.; Adler, R. K.:** *Map Projections: for geodesists, Cartographers and Geographers*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1972.

**Santos, A. A. dos :** *Representações Cartográficas*, Recife, Universidade Federal de Pernambuco, Ed. Universitária, 1985.