Método de Avaliação da Precisão dos Modelos Numéricos da Informação Geográfica

Prof. Dr. Prof. Dr. Igor Garmiz [1]
Eng.º Jerónimo Pio Ainda [2]

[1] UAN - Depto. de Matemática e Engenharia Geográfica FC
Universidade Agostinho Neto
Cx. P. 513 LUANDA – ANGOLA

[2] UAN Depto. de Matemática
e Engenharia Geográfica FC
Universidade Agostinho Neto
Cx. P. 815 LUANDA – ANGOLA

Resumo : *O artigo descreve a elaboração de um método teórico da avaliação da precisão dos modelos numéricos, resultando as formulas finais para os diversos tipos de interpolações dos modelos numéricos da informação geográfica. Nas referidas formulas , na qualidade da função , que caracteriza a superfície analisada, foi empregue uma função geomorfológica , designada –* ***Função Estrutural.*** *Foi comprovada a aplicação do Método para a determinação da densidade dos pontos, que constituem um modelo.*

Palavras chaves : *COBRAC, Avaliação da Precisão*

Abstract : *This article describes the steps of theoretical method of precision evaluation from the numerical models, which results in final formulas for several sorts of interpolation from the numerical models of geographic information. As a function which shows out the analyzed surface, was used a geomorphologic function in such formulas, designated* ***Structural Function****.*

Keywords : *COBRAC, Precision Evaluation*

Nos últimos anos a produção automatizada do material cartográfico diversificado tomou um caracter intensivo. Em função disso, perante o processo da automatização colocam-se novas tarefas importantes , assim como: a definição da quantidade ótima da informação introduzida no programa para a execução de um mapa verídico; a avaliação da precisão dum mapa em função da quantidade da informação introduzida; o controle da qualidade da superfície do fenômeno cartográfico, etc.. Os meios de automatização têm utilizações mais amplas na elaboração de mapas isolineares, assim como os climáticos (isobáricos, isotérmicos), tal como mapas dos campos geofísicos (aeromagnéticos, graviométricos), ou do relevo (terrestre ou marinho), etc.…

Relativamente a analise da precisão dos modelos numéricos da informação geográfica como também, da construção automatizada dos mapas isolineares, que se fundamentam nestes modelos, diversos autores evocam a necessidade da elaboração de métodos da avaliação da precisão , fundamentando-se em analises do modelo inicial do objeto, mais precisos do que os já existentes . Afirma-se, que a tarefa da projeção da precisão do fenômeno cartográfico refletido pode ser resolvida à base do estudo da dependência entre a precisão dos valores do fenômeno em pontos iniciais e a distancia entre estes pontos. É obvio, que quando existe a projeção da imagem , é necessário ter em conta ainda outras propriedades da superfície do fenômeno cartografado (por exemplo: a sua estrutura interna) e o método da interpolação , utilizado para a construção das isolineas.

Proponha-se determinar a dependência entre a precisão e a distância entre os pontos iniciais do modelo para cada superfície concreta à via experimental, utilizando o conjunto de pontos de base do ensaio, distribuídos com uma freqüência suficiente ao longo de algumas isolineas e cobrindo de modo igual toda a área cartografada. Para as diferentes variantes da dispersão dos pontos da base sobre as linhas , nos quais os pontos ignorados consideram-se como os de controle, encontrando-se os erros da interpolação, como a diferença dos valores interpolados pelos pontos das bases iniciais, e os pontos de controle, dos quais foram considerados no processo da interpolação. Devemos sublinhar , que este método freqüentemente utiliza-se para a avaliação da precisão da imagem isolinear dos fenômenos (em particular para a avaliação da precisão do desenho do relevo).

Tendo em conta a necessidade da gestão da veridibilidade, quanto a automatização da construção dos mapas isolineares, a questão da avaliação da precisão do modelo , à base do qual será executada esta construção , é muito importante, porém, pelos vistos, insuficientemente elaborada. Esta conclusão si deve à ausência duma metodologia da avaliação apriori da precisão do modelo numérico, dependentemente das características da superfície cartografada e do método da interpolação utilizado neste modelo.

Considerando a importância desta questão, realizamos investigações no âmbito da elaboração de um método de avaliação da precisão da interpolação dos modelos numéricos.

Como o resultado das mesmas adquirimos um método, pelo qual a superfície do fenômeno caracteriza-se pela função estrutural de tipo:

$$b_F(l) = \overline{(F_i - F_j)^2}, \qquad (1)$$

onde **Fi** e **Fj** - são os valores do fenômeno, em pontos , que se encontram à uma distância **l** um do outro(a barra em cima assinala o emprego dos valores médios desta função).

Abordaremos a avaliação da precisão em caso, quando o valor do fenômeno se considera nos extremos da rede quadrangular. Na qualidade dos algoritmos da interpolação utilizaremos os métodos da interpolação bilinear e biquadratica. Para estes métodos da interpolação pela rede quadrangular, escolha-se a quantidade de pontos iniciais , mais aproximada ao da em definição: são uns 4 ou 16 pontos. A resolução desta tarefa , que se coloca no nosso trabalho , é válida nos casos em que a superfície do fenômeno é detentora das propriedades da homogeneidade e isotropia, considerando-se como tais os diversos campos meteorológicos ou geofísicos, ou o relevo das regiões planálticas e das planícies de extensões limitadas (Noskov, 1969). Em caso da superfície de um fenômeno qualquer possuir características heterogêneas, admite-se racionalmente a sua transposição para um campo homogêneo, utilizando as metodologias conhecidas , assim com , as expostas nos trabalhos de Frolov Y. S. e Yagodina L. L. (1970), com relação aos campos cartográficos de relevo.

A idéia da utilização da função estrutural para a avaliação da precisão da interpolação pertence à Drozdov O. A. na sua teoria da interpolação do campo dos elementos meteorológicos, completando-se posteriormente nos trabalhos de Gandin L. S..

Segundo a teoria do Drozdov O. A. , o erro da interpolação linear do centro de uma distância entre dois pontos da superfície de um fenômeno caracteriza-se pelo seguinte:

$$\varepsilon_{F2} = b_F\left(l/_2\right) - {}^1/_4\, b_F(l), \qquad (2)$$

onde ε_{F2} - é o erro médio quadrático da interpolação entre dois pontos;

l é a distância entre estes pontos.

Quanto a interpolação do centro de um triângulo eqüilateral (a definição da altitude num ponto , que se encontra à uma distância igual dos três pontos iniciais) o erro médio quadrático (EMQ) da interpolação interpreta-se pelo seguinte:

$$\varepsilon_{F3} = b_F\left(l/\sqrt{3}\right) - {}^1/_3\, b_F(l). \qquad (3)$$

Por fim , têm uso freqüente a interpolação por quatro pontos iniciais, distribuídos pelos extremos da rede de quadrados, ou então, a interpolação bilinear. Neste caso EMQ da interpolação bilinear para o centro do quadrado define-se:

$$\varepsilon_{F4} = b_F(l) - {}^1/_4\, b_F\left(l/\sqrt{2}\right) - {}^1/_8\, b_F(2l), \qquad (4)$$

Com objetivo da utilização prática das formulas (2) - (4), das quais as duas primeiras foram introduzidas por Drozdov O. V., enquanto que a terceira - por Gandin. A. S. , realizamos no decorrer das investigações uma experiência de cálculo. Para a referida experiência escolheram-se dois fragmentos do mapa do relevo das duas áreas situadas nos limites dum terraço fluvial. A superfície das áreas é plana no seu todo, com uma inclinação gradual em direção do leito do rio. O declive é na ordem de 0,001. O micro-relevo da primeira área representa-se pelas formas acidentadas positivas e negativas, com variações de altitude de 0,5 - 1,0 metros. Na segunda área , as micro-formas são ,na maior parte, positivas de 1,0- 1,5 metros de altitude, e com os contornos mais acidentados e complexos. O tamanho da primeira área constitui 1,0 X 1,25 km, o da segunda 2,0 X 2,0 km. Nos fragmentos do mapa foi concebida uma rede de quadrados com tamanho de 0,5X0,5 cm, o que corresponde para superfície real : na primeira área - 25X25 metros, e na segunda área - correspondentemente 50X50 metros. As altitudes dos pontos iniciais (extremos dos quadrados) determinaram-se pela interpolação linear entre as horizontais. Desta feita, toda a informação necessária sobre o relevo da primeira área consistiu-se em 2000 pontos e da segunda - em 1680 pontos. Segundo estas bases numéricas realizaram-se os cálculos das funções estruturais das altitudes pela formula (1) (Figura 1). Utilizando os valores da função estrutural obtidos e as formulas (2),(3) e(4), calcularam-se os valores do EMQ para cada quantidade dos pontos iniciais: dois, três e quatro. Os cálculos foram feitos para os valores do ***l*** correspondentes à 1, 2 , 3 e 4 cm. O resultado dos cálculos demostrou , que os erros da interpolação diminuem quando diminui a quantidade dos pontos iniciais. O que se nota ainda mais , quando o ***l*** adquire os valores maiores.

YYY f1: "*As Funções Estruturais das Altitudes para as Primeira e Segunda Áreas de Ensaio",*

Ao mesmo tempo, e de acordo com os trabalhos de Drozdov O. A. e de Gandin L. S., com o aumento da quantidade de pontos iniciais, encontrando-se à uma mesma distância de um ponto por definir , o erro da interpolação deve diminuir insignificativamente. Quando o número de pontos iniciais for superior à seis, este erro deve adquirir valores constantes.

O aumento significativo do valor do erro da interpolação de quatro pontos iniciais (comparado com o erro de dois ou três pontos) - demostra a incompatibilidade entre as formulas (2),(3) e(4).A averiguação deste fato pode ser feita de modo mais generalizado, colocando as funções estruturais da aproximação das formulas (3) e(4).

Aproximando as funções estruturais das duas formulas :

a. : linear , interceptando o inicio das coordenadas - $b(F) = kl$, ***(5)***

b. : parabólica, interceptando o inicio das coordenadas - $b(F) = Al + Bl^2$, ***(6)***

adquirimos os valores do erro da interpolação linear, seguintes :

no primeiro caso :

$$\varepsilon_3 = 0{,}245\, kl \quad \text{e} \quad \varepsilon_4 = 0{,}280\, kl, \qquad (7)$$

no segundo caso :

$$\varepsilon_3 = 0{,}245\, Al \quad \text{e} \quad \varepsilon_4 = 0{,}396\, Al. \qquad (8)$$

Donde se vê, que com o aumento de pontos iniciais a precisão da interpolação linear diminue , o que não pode acorre na realidade.

Para revelar as razões desta incompatibilidade, chegamos a conceber uma formula do Erro da Interpolação Bilinear, dependente da função estrutural para o caso de quatro pontos iniciais (para centro do quadrado), seguinte:

$$\varepsilon_4 = (F'_o - ¼\sum_{i=1}^{4} F'_j)^2 \ , \tag{9}$$

onde F'_o - é uma determinada função do centro do quadrado;

F'_j - os valores da função nos extremos dos quadrados, cujos as coordenadas são - x_i e y_i. O inicio das coordenadas corresponde ao centro do quadrado.

Suponha-se, assim, que:

a. o erro máximo da interpolação corresponde ao centro do quadrado;
b. não se considera uma função composta, de maneira que, na conclusão final a referencia não será atribuída aos valores da referida função, mas sim às suas digressões - ***Fí*** - sobre um plano médio : ***Fi = Fí - Fméd;*** ***(10)***
c. a superfície do fenômeno é homogênea e isótropa.

Apresentamos ,assim, a **formula final** ,como:

$$\varepsilon_4 = b_F (l/\sqrt{2}) - 1/4 \ b_F (l) - 1/8 \ b_F (l/\sqrt{2}). \tag{11}$$

Comparando a formula do Erro da Interpolação Bilinear, apresentada pelo Gandin L. S. , e a formula (11), Chegamos a conclusão que expressão (4) detêm um erro : o ***l*** aqui não é o tamanho do quadrado, mas é a distância entre os pontos iniciais e o ponto por definir (ou ½ da diagonal do quadrado). Transcrevendo as expressões (2) e (3) em significados análogos à equação (4), obtivemos para o caso de dois pontos iniciais:

$$\varepsilon_{F2} = b_F (l) - 1/4 \ b_F(2l) \ ; \tag{12}$$

e para o caso de três pontos iniciais :

$$\varepsilon_{F3} = b_F (l) - 1/3 \ b_F \ (l/\sqrt{3}). \tag{13}$$

Os valores previstos do Erro da Interpolação Linear , calculados pelas expressões (4) , (12) e (13) , apresentam-se na Tabela 1.

Realizando a averiguação generalizada , colocamos nas expressões (4), (12) e (13) , a função estrutural , aproximando-a à linear de tipo ***bF = kl***, obtendo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= kl - ½ \ kl = 0{,}5 \ kl \\ \varepsilon_3 &= kl \ (1 - \sqrt{3}/3) = 0{,}422 \ kl \\ \varepsilon_4 &= kl \ (1 - \sqrt{2}/4 - ¼) = 0{,}279 \ kl \end{aligned} \tag{14}$$

Os dados da Tabela 1, assim como, os valores da expressão (14), confirmam a conclusão do Drozdov e Gandin sobre a diminuição do erro da interpolação linear com o aumento dos pontos iniciais.

No decorrer das investigações realizou-se a averiguação da equação (11) para os modelos numéricos reais do relevo para as áreas acima mencionadas. Os valores da função estrutural para estas áreas (veja Figura 1), foram introduzidas na expressão (11). Os valores adquiridos para o ***l*** estão expostos nos gráficos da Figura 2. As curvas, concebidas pelos valores do ***l***, designaram-se como as curvas teóricas.

Yyy f2: ***Os Gráficos da Dependência Entre o Erro da Interpolação e o Tamanho da Rede (A-1ª Área; B - 2ª Área).***

Com objetivo de comparar estes dados com os resultados dos cálculos práticos, com bases nos pontos de altitude executou-se a avaliação experimental da precisão da interpolação. Com isso , uma parte dos pontos da base não foi utilizada na interpolação, considerando-se como pontos de controle.

Os resultados da avaliação experimental da precisão da interpolação, refletidos nos gráficos da Figura 2 , constituem curvas experimentais. Fica, assim, nitidamente expressa a correspondência entre as curvas teóricas e as experimentais. O acima enunciado permite chegar à conclusão de que para a avaliação da precisão da interpolação bilinear para os diversos campos de fenômenos, como também, para a escolha ótima do tamanho da rede dos modelos numéricos destes campos , a formula (11) pode ser empregue com sucesso.

Tendo em conta de que, para alguns campos será efetivo o emprego de polinômios de alto grau (por exemplo a interpolação bicúbica) , enquanto que para outros – emprega-se polinômios mais simples (por exemplo: a interpolação bilinear) - apresentando-se necessário obter a expressão do erro para a interpolação bicúbica. Desta feita, calculando os valores dos erros das interpolações bilinear e bicúbica , pelos valores das funções estruturais para os diversos tipos de campos, poderíamos avaliar as vantagens destas ou das outras formulas de interpolação.

Tendo o passo da rede o ***l***, obtivemos a formula final do EMQ da interpolação bicúbica:

$$\varepsilon_{16} = {}^{1}/_{65\,536}\ [82944\ b_F(^{\sqrt{2}}/_2\ l) - 20664\ b_F(l) - 7938\ b_F(\sqrt{2}l) + \\ + 5904\ b_F(2l) + 1024\ b_F(3^{\sqrt{2}}/_2\ l) + 4536\ b_F(\sqrt{5}l) - \\ -18432\ b_F(^{\sqrt{10}}/_2\ l) - 648\ b_F(2\sqrt{2}l) - 328\ b_F(3l) - \\ - 2\ b_F(3\sqrt{2}\ l) - 252\ b_F(\sqrt{10}\ l) + 72\ b_F(\sqrt{13}l)]. \qquad (15)$$

Para a utilização prática a expressão (15) foi transformada de maneira seguinte: os membros da equação foram divididos pelo coeficiente $^{1}/_{65536}$. Alem disso, os membros da equação - ***2 b_F (3 SQRT(2) l)* e *72 b_F (SQRT(3) l),*** pela sua insignificância podem ser excluídos. Torna assim, a expressão (15), na configuração final seguinte:

$$\varepsilon_{16} = 1,2630\ b_F(^{\sqrt{2}}/_2\ l) - 0,3158\ b_F(l) - 0,1210\ b_F(\sqrt{2}l) + \\ + 0,0904\ b_F(2l) + 0,0157\ b_F(3^{\sqrt{2}}/_2\ l) + 0,0692\ b_F(\sqrt{5}l) - \\ - 0,2815 b_F(^{\sqrt{10}}/_2\ l) - 0,0100\ b_F(2\sqrt{2}l) - 0,0050\ b_F(3l) - \\ - 0,0038\ b_F(\sqrt{10}\ l). \qquad (16)$$

Para um teste prático da formula obtida realizamos a comparação dos resultados da avaliação experimental dos erros da interpolação bicúbica, definidos com base nos pontos acima referenciados, com valores teóricos obtidos pela formula (16)

Nesta formula foram introduzidos os valores dos significados estruturais apresentados na Figura 1. Os valores dos erros, definidos via experimental e teórica apresentam-se na Figura 3. Ambos os gráficos representam uma boa aproximação das referidas curvas, o que confirma a utilidade da formula (16) para a avaliação do erro da interpolação para os diversos campos de fenômenos.

Yyy f3: Os Gráficos de Comparação do Erro
Quanto a Interpolação Bicúbica e Bilinear.

A tarefa da escolha adequada do método da interpolação e do tamanho ótimo da rede para um modelo numérico do campo, pode ser vista pelas duas condições seguintes:

1. Quando para um determinado campo desconhece-se o tipo da função estrutural, neste caso, a função designa-se pela seleção dos valores do fenômeno. Os valores da função introduzem-se nas equações (11) e (16), compondo-se a seguir aos gráficos da dependência dos erros da interpolação bilinear e bicúbica da distância entre os extremos dos quadrados. Comparando estes gráficos, determinam-se assim quais dos métodos da interpolação oferece a maior precisão. O gráfico apresenta também à possibilidade de determinar o tamanho da rede de quadrados, que proporcionará a precisão necessária, considerando o erro admissível do cálculo dos valores da função para o modelo numérico do campo, definido pelos objetivos práticos concretos.

2. Quando existe uma expressão , que aproxima a função estrutural para o campo em questão, os procedimentos se ordenam de maneira seguinte:

    a. Introduz-se o valor da função estrutural na formula (11), obtenha-se a dependência do erro da interpolação bilinear do tamanho da rede;

    b. realizando a mesma operação para expressão (16), adquiri-se a equação, que caracteriza a dependência do erro da interpolação bicúbica do tamanho da rede;

    c. obtendo a diferença entre a segunda e a primeira equações, iguala-se o resultado a "0" ($\varepsilon_{16} - \varepsilon_4 = 0$), determinam-se os limites de preferencia para cada método da interpolação.

O acima exposto podemos exemplificar com a expressão de tipo :

$$b_{F(l)} = Al + Bl^2 \qquad (17)$$

Introduzimos a mesma nas formulas (11) e (16), obtemos:

$$\varepsilon_4 = A\,{}^{\sqrt{2}}/_2 l - A\,{}^1\!/_4\, l - A\,{}^1\!/_8\, \sqrt{2}l + B\,({}^{\sqrt{2}}/_2\, l)^2 - {}^B/_4\, l^2 - {}^B/_8 (\sqrt{2}l)^2 = 0{,}2804\, Al. \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{16} = {} & 1{,}2630\, A({}^{\sqrt{2}}/_2 l) - 0{,}3158Bl - -0{,}1210A(\sqrt{2}l) + \\ & +0{,}0904\, A2l + 0{,}0157\, A3\sqrt{2}/2l + 0{,}0692\, A\sqrt{5}l - \\ & -0{,}2815A{}^{\sqrt{10}}/_2\, l - 0{,}0100\, A2\sqrt{2}l - 0{,}0050\, A3l - \\ & - 0{,}0038A\sqrt{10}\, l - 1{,}2630Bl^2 + 0{,}315\, Bl^2 + 0{,}1210 \bullet 2\, l^2 - \\ & -0{,}0904B \bullet 4l^2 - 0{,}01578 \bullet 4{,}4\, l^2 - 0{,}0692B \bullet 5l^2 + 0{,}2815B \bullet 2{,}5l^2 + \\ & +0{,}0100B \bullet 8\, l^2 + 0{,}0050B \bullet 9l^2 + 0{,}0040B \bullet 10l^2 = \\ & = 0{,}279Al + 0{,}015Bl^2.\end{aligned} \tag{19}$$

A diferença entre a (19) e a (18) constituirá:

$\varepsilon_{16} - \varepsilon_4 = 0{,}279\, Al + 0{,}015\, Bl^2 - 0{,}2804\, Al = -\, 0{,}0014\, Al + 0{,}015\, Bl^2,$

ou

$\varepsilon_{16} - \varepsilon_4 = l\,(\,-0{,}0014\, A + 0{,}015\, Bl\,).$ *(20)*

Para determinar quais são os valores do l, que igualarão a precisão da interpolação bilinear e bicúbica, e sendo $l \neq 0$, consideramos:

$-0{,}0014\, A + 0{,}015\, Bl = 0\,,$ *(21)*

donde,

$l = {}^{0{,}0014\, A}/_{0{,}015\, B} \sim 0{,}067\, {}^A/_B.$

Desta feita,

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad l = 0{,}067\, {}^A/_B\,, \quad \text{então} \quad \varepsilon_{16} . \varepsilon_4 = 0 \\ &\text{se} \quad l > 0{,}067\, {}^A/_B\,, \quad \text{então} \quad \varepsilon_{16} . \varepsilon_4 > 0 \\ &\text{se} \quad l < 0{,}067\, {}^A/_B\,, \quad \text{então} \quad \varepsilon_{16} . \varepsilon_4 < 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Consequentemente, a precisão da interpolação bicúbica será igual à da interpolação bilinear , caso a função estrutural aproximada à expressão (17) adquire $l = 0{,}067\, {}^A/_B$.

Quanto ao aumento do passo da rede l*, a definição do valor da função vai ser mais precisa com o emprego da interpolação bilinear, e ao contrario , com a diminuição do passo da rede é preferível o emprego da interpolação bicúbica.*

Além da função estrutural, freqüentemente utilizam-se outras características de acidentação do campo do fenômeno. Com relação ao relevo terrestre, estas características podem ser múltiplas, necessitando a sua transformação na função estrutural. Demostramos a possibilidade da utilização destas características para a resolução da nossa tarefa no exemplo do relevo. Busalaev V. V., analisou os resultados dos estudos morfométricos , chegou à conclusão, de que a curva de acidentação para os diversos territórios, aproximavam-se facilmente à expressão :

$$|h|_{méd.}(l) = Al^{\alpha}, \quad \text{onde} \quad 0 < \alpha > 2. \tag{23}$$

relação dos coeficientes **A** *e* **a***, obtidos por via experimental para os terrenos planos e acidentados apresentam-se na Tabela 2.*

Os trabalhos de Frolov Y. S. e de Ygadina L. L. (1970) , confirmaram as conclusões de Busalaev, que demostraram a dependência (23) sendo válida somente para os valores médios do l *. No mesmo trabalho , Busalaev comprova a ligação da curva de acidentação do relevo, para com a função estrutural das altitudes:*

$$\sqrt{\pi/2}\,|h|_{méd}\cdot(l)=\sqrt{b_h(l)}. \tag{24}$$

Considerando a expressão (23), transformamos a (24), obtemos a seguinte:

$$b_h(l) = Bl^{\beta}\text{, onde } B = \pi/2 \times H^2 \quad \text{e} \quad \beta = 2\alpha \tag{25}$$

*Considerando os dados da Tabela 2 e a expressão (25) , fazemos referencia aos coeficientes **B** e **ß** da função estrutural das altitudes na Tabela 3.*

Para responder a questão : " Qual dos métodos da interpolação dá melhor resultado para estas áreas?"; introduzimos os valores numéricos da função estrutural (25) e os coeficientes referidos na Tabela 3 nas formulas (11) e(16). Os resultados dos cálculos apresentam-se na Tabela 4. Os dados da Tabela 4 demostram , que para todas as áreas analisadas a interpolação bicúbica dá maior precisão da definição das altitudes dos pontos, crescendo as vantagens do método , quando aumenta a acidentação do relevo.

*Impondo a **ß = 1** para a expressão (25), obteremos a função estrutural:*

$$b_h(l) = Bl\,, \tag{26}$$

que representa uma reta, interceptando o início das coordenadas. Introduzindo a função (26) em (11) e (16) , obteremos , correspondentemente:

$$\varepsilon_4 = 0{,}280Bl \quad \text{e} \quad \varepsilon_{16} = 0{,}279\ Bl. \tag{27}$$

Consequentemente, e neste caso, a interpolação bicúbica é de alguma maneira preferencial à interpolação bilinear.

Concluindo sublinhamos , que as investigações realizadas demostram a possibilidade da avaliação teórica do erro da interpolação dos campos de fenômenos diversos com o auxilio de uma função estrutural, como principal característica da acidentação do campo.

A metodologia elaborada permite adquirir as dependências semelhantes para as diversas formulas da interpolação. Para além disso, a experiência realizada comprova a possibilidade de transformação das diversas caraterísticas do campo para uma função estrutural , com a posterior avaliação do erro da interpolação, refletindo-se , assim, a complexidade do campo do fenômeno(por exemplo: a curva de acidentação). Isto aumenta significativamente a utilidade do método proposto para os trabalhos cartográficos e de engenharia.

Quanto aos trabalhos dos modelos numéricos dos fenômenos, torna-se necessário avaliar o seu erro, tendo em conta alguns componentes do mesmo. O erro somatório de um modelo (ε_Σ), será composto pelo erro - ε_o, condicionado pela inexatidão dos dados iniciais do erro da modelagem propriamente dita - ε_m.

Pois,

$$\varepsilon_\Sigma^2 = \varepsilon_o^2 + \varepsilon_m^2. \tag{28}$$

Definiremos a influência do ε_o sobre a exatidão dos valores da função, encontrando-se em alguns pontos do modelo " quadrático". Para o caso da interpolação bilinear, teremos:

$$E_\sigma^2 = \left|\frac{(l-\Delta x)(l-\Delta y)^2}{l^2}\right|^2 E_1^2 + \left|\frac{\Delta x(l-\Delta y)}{l^2}\right|^2 E_2^2 + \left|\frac{\Delta y\,(l-\Delta x)}{l^2}\right|^2 E_3^2 + \frac{\Delta x\ \Delta y^2}{l^4} * E_4^2 \tag{29}$$

Considerando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_{inic.}$, assim como, $\Delta x = k_1 l$ e $\Delta y = k_1 l$, onde k_1 e k_1 - são coeficientes, transformando-os em limites $0 \le k_1 \le 1$ e $0 \le k_2 \le 1$, transcrevemos:

$$\varepsilon^2_o = \varepsilon i_{nic}\left[(1- k_1)^2 (1- k_2)^2 + k_1^2 (1- k_2)^2 + k_2^2(1- k_1)^2 + k_1^2 k_2^2\right] \tag{30a}$$

ou,

$$\varepsilon^2_o = \varepsilon i_{nic}(1-2 k_1-2 k_2 + 2 k_1^2 + 2k_2^2 + 4k_1 k_2- 4 k_1 k_2^2 - 4 k_1^2 k_2 + 4k_1^2 k_2^2). \tag{30b}$$

Nota-se, que quando $k_1 = k_2 = 0$, o $\varepsilon_o = \varepsilon_{inic}$..

Para encontramos a dependência de ε_o e do ε_{inic}, quanto a definição dos valores da função em centros dos quadrados, introduzimos na (30) os $k_1 = k_2 =0,5$. e obtemos assim:

$$\varepsilon_o = 0,5\, \varepsilon_{inic} \tag{31}$$

O valor médio do erro ε_o no quadrado, adquire-se pela integral (30) por k_1 e k_2, nos limites de 0 até 1.

$$\varepsilon^2_o = \varepsilon_{inic} \int_0^1\int_0^1 (1-2 k_1)-2 k_2 + 2 k_1^2 + 2k_2^2 + 4k_1 k_2- \tag{32}$$

$$- 4 k_1^2 k_2- 4 k_1 k_2^2 + 4k_1^2 k_2^2)\, \alpha\, k_1 \alpha\, k_2 = {}^4/_9\, \varepsilon^2_{inic},$$

donde

$$\varepsilon_o = {}^2/_3\, \varepsilon_{inic} \tag{33}$$

No caso da interpolação bicúbica para o centro do quadrado, consideramos:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{16} = \varepsilon_{inic} \; ,$$

teremos

$$\varepsilon_o^2 = ({}^1/_{256})^2\, 4\, \varepsilon^2_{inic} + ({}^{81}/_{256})^2\, 4\, \varepsilon^2_{inicn} +$$

$$+ ({}^9/_{256})^2 8\, \varepsilon^2_{inic} = ({}^{26900}/_{256^2})\, \varepsilon^2_{inic} \approx 0,41\, \varepsilon^2_{inic}\, , \tag{34}$$

ou $$\varepsilon_o = 0,64\, \varepsilon_{inic}$$

Comparando a (31) e a (34), detectamos que em caso da interpolação bicúbica o erro e_o é um pouco maior do que para a interpolação bilinear.

Para definir a exatidão necessária dos dados iniciais para a criação de um determinado modelo numérico de campo do fenômeno, ou da rede quadrangular, tal como a escolha do tamanho do quadrado, faremos uso do princípio da influência eqüitativa dos componentes sobre o ε_Σ do modelo.

Desta feita,

$$\varepsilon_m = \varepsilon_o = \varepsilon_\Sigma / \sqrt{2} \qquad (35)$$

Quanto ao erro da definição do valor do fenômeno o modelo é dado em função das exigências práticas para com o mesmo, então, supondo que, $\varepsilon_{admiss.} = \varepsilon_\Sigma$, pela expressão (35), encontraremos $\varepsilon_m = \varepsilon_o$.

Os dados iniciais para a criação do modelo escolher-se-ão em função do $\varepsilon_{inic.}$, calculado pela formula (31) ou (34). O tamanho da seção do modelo define-se tendo em conta $\varepsilon_{inic.}$ em consideração o acima exposto.

Bibliografia

***Busalaev I. V.**: O Prilogenie Metodov Statisticheskogo Opisania Sluchainex Polei e Caracteristik Reliefa Zemnoi Poverxnosti , IZV. AN KAZSSR, 1960, Ser. Energeticheskaia, Vep.2.*

***Frolov Y.S., Yagodina L.L. :** Autocorelacionnaia Funczia E Colichestvennaia Caracteristica Relefa, Vestn. Lenigr. Yniv-Ta,1970,Nº18.*

***Gandin L. S.** : O Lineinoi Interpolazii v Dvux Izmereniax, Tr. GTO, Vep.71.*

***Noscov V.F.:** Matematicheskaia Model Relefa e Sviaz eie Parametrov s Geomorfologicheskimi Caracteristicami, Vestn. Mosk.Yniv-Ta, Ser. Geografia, Nº 1 ,1969.*

***Serebrenuk S.N.**: Sostavlenie Ozenochnex Cart s Primeneniem Mnogomernex Statisticheskix Modelei Factornogo e Componenetnogo Analizov, Ozenochnee Carte Pripode, Naselenia e Xoziastva , M.,1973,P 220.*

Tabela 1

e ,m	*l*,cm			
	1	2	3	4
e 2	0,03	0,014	0,35	0,43
e 3	0,02	0,11	0,29	0,45
e 4	0,01	0,10	0,20	0,43

TABELA 2

OBJECTOS	COEFICIENTES A	α
TERRITÓRIO PLANO		
I área	**0,012**	**0,585**
II área	**0,014**	**0,630**
III área	**0,013**	**0,823**
IV área	**0,020**	**0,910**
TERRENO ACIDENTADO		
I área	**0,230**	**0,815**
II área	**0,200**	**0,823**

Fonte : Busalaev V.V.

TABELA 3

OBJECTOS	COEFICIENTES B	β
TERRITÓRIO PLANO		
I área	0,00021	1,170
II área	0,00030	1,260
III área	0,00025	1,646
IV área	0,00060	1,820
TERRENO ACIDENTADO		
I área	0,079	1,630
II área	0,060	1,640

TABELA 4

OBJECTOS	COEFICIENTES e_4	e_{16}
TERRITÓRIO PLANO		
I área	$0,000049 \cdot l^{1,170}$	$0,000046 \cdot l^{1,170}$
II área	$0,000059 \cdot l^{1,260}$	$0,000054 \cdot l^{1,260}$
III área	$0,000024 \cdot l^{1,646}$	$0,000018 \cdot l^{1,646}$
IV área	$0,000028 \cdot l^{1,820}$	$0,000012 \cdot l^{1,820}$
TERRENO ACIDENTADO		
I área	$0,075 \cdot l^{1,630}$	$0.0058 \cdot l^{1,630}$
II área	$0,058 \cdot l^{1,646}$	$0,0044 \cdot l^{1,640}$

OBS: l - dado em metros.