

## Comparação entre os Transportes de Coordenadas pelas Formulações de Sodano e Puissant e as obtidas por GPS

- ☑ Alexandre André de Oliveira Pires
- ☑ Eno Darci Saatkamp
- ☑ José Gonzales Bricenó
- ☑ Patrício A. Aguirre
- ☑ Regiane Dalazoana

### Orientadores :

- ☑ Profª. Dra Cláudia Pereira Krueger · ☑ Prof. Msc Pedro Luis Faggion

Universidade Federal do Paraná  
Departamento de Geomática  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
Curitiba PR

Conteúdo	
	1 Introdução
	2 Transporte de Coordenadas
	2.1 Solução para os Problemas Direto e Inverso da Geodésia: Fórmulas de Puissant
	2.1.1 Problema Inverso
	2.1.2 Problema Direto
	2.2 Solução não iterativa para os Problemas Direto e Inverso da Geodésia: Fórmulas de Sodano
	2.2.1 Problema Inverso
	2.2.2 Problema Direto
	2.3 Procedimento de Campo
	2.3.1 Cálculo da correção atmosférica às distâncias eletrônicas medidas em campo
	2.3.2 Cálculo da distância horizontalizada e da altitude
	2.3.3 Cálculo da distância elipsoidal entre os pontos
	2.4 Resultados obtidos com as Fórmulas de Puissant
	2.5 Resultados obtidos com as Fórmulas de Sodano
	2.6 Comparação entre as duas formulações para o Transporte de Coordenadas
	2.7 Comparação utilizando Dados GPS
	3 Levantamento GPS
	3.1 Procedimento de Campo
	3.2 Resultados
	4 Considerações Finais
	5 Referências Bibliográficas

**Resumo:** O transporte de coordenadas consiste na obtenção de coordenadas de pontos por propagação desde um Datum, ou seja, desde um ponto origem de coordenadas conhecidas. As coordenadas dos pontos são vinculadas às do ponto de origem e são determinadas por mensurações de distâncias e ângulos, sendo usado como superfície de referência o elipsóide. Frequentemente a comunidade geodésica utiliza para o transporte de coordenadas a formulação de Puissant, que é indicada somente para bases curtas (<80 km), entretanto, existem outros métodos, tais como o desenvolvido por Sodano na década de 50, o qual pode ser utilizado tanto para bases curtas como longas, facilitando a programação. Neste trabalho foram testadas ambas as formulações. Para tal, efetuou-se um posicionamento GPS relativo de pontos com a técnica estática visando comparar as coordenadas obtidas com cada uma das metodologias anteriormente citadas.

**Palavras chave:** transporte de coordenadas, problema direto, problema inverso, Puissant, Sodano

**Resúmen:** El transporte de coordenadas consiste en la obtención de coordenadas de puntos mediante propagación desde un Datum, o sea, desde un punto origen de coordenadas conocidas. Las coordenadas de los puntos son vinculadas a las del punto de origen y son determinadas por medidas de distancias y ángulos, siendo utilizada como superficie de referencia el elipsoide.

Comunmente la comunidad geodésica utiliza para el transporte de coordenadas las fórmulas de Puissant, que es recomendada solamente para bases cortas (<80 km), sin embargo, existen otros métodos, tales como el desarrollado por Sodano en la década del 50, el cual puede ser utilizado tanto para bases cortas como para bases largas, facilitando la programación. En este trabajo fueron comparadas ambas formulaciones. Para tal efecto, se efectuó un posicionamiento GPS relativo de puntos con la técnica estática, visando comparar las coordenadas obtenidas con cada una de las metodologías anteriormente citadas.

### 1 Introdução

As áreas de topografia, geodésia e fotogrametria sofreram nas últimas décadas um grande avanço tecnológico, não só com a modernização dos instrumentos de medida como também com o surgimento de programas aplicativos para estas áreas.

Como exemplo do avanço na área instrumental pode-se citar os teodolitos eletrônicos, os distanciômetros eletrônicos, as estações total e os níveis digitais, além do posicionamento por satélites (GPS e GLONASS). O uso destes equipamentos aliados aos programas aplicativos mudaram a conduta na coleta e tratamento dos dados bem como na apresentação dos resultados. O

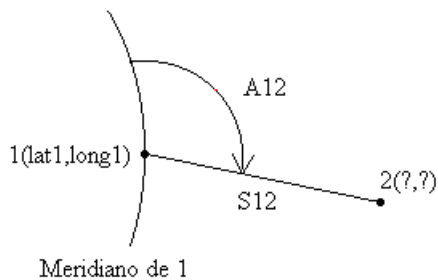
aparecimento das novas técnicas e opções de mensuração traz a necessidade de se avaliar corretamente os limites dos processos envolvidos.

Foi realizado um transporte de coordenadas aplicando técnicas e equipamentos diferentes, com o objetivo de se realizar uma comparação dos resultados fornecidos por cada técnica. Para a determinação das coordenadas de pontos foram realizados um levantamento GPS e um transporte de coordenadas utilizando uma estação total, no qual foram empregadas duas formulações diferentes.

## 2 Transporte de Coordenadas

O transporte de coordenadas consiste na obtenção de coordenadas de pontos por propagação a partir de um Datum, ou seja, a partir de um ponto origem cujas coordenadas sejam conhecidas. As coordenadas dos pontos são vinculadas às do ponto origem e são determinadas por mensurações de bases, ângulos e azimutes, sendo usado como superfície de referência o elipsóide.

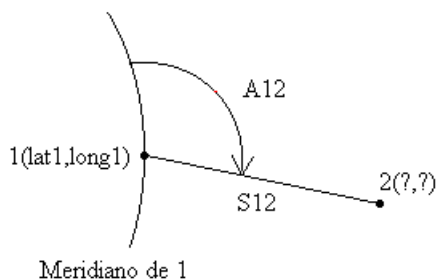
Existem duas situações, denominadas de problema direto e problema inverso da geodésia. No problema direto (figura 01) são conhecidas as coordenadas geodésicas (latitude e longitude) de um ponto, a distância e o azimute para um segundo ponto, e é necessário determinar as coordenadas geodésicas (latitude e longitude) deste segundo ponto.



S12 : distância entre o ponto 1 e ponto 2

**Fig. 1 :** Problema Direto

No problema inverso (figura 02) são conhecidas as coordenadas geodésicas de dois pontos, e é necessário determinar a distância e o azimute entre os dois pontos.



S12 : distância entre o ponto 1 e ponto 2

**Fig. 2 :** Problema Inverso

### 2.1 Solução para os Problemas Direto e Inverso da Geodésia: Fórmulas de Puissant

As equações de Puissant, comumente usadas no Brasil, são válidas para bases cujo comprimento não seja superior a 80 km, devido ao fato destas serem deduzidas com simplificações para um modelo esférico, de serem desenvolvidas em séries matemáticas e de adotar um raio médio terrestre para a região levantada. A dedução das equações de Puissant podem ser encontradas em HOSMER (1946) e em GEMAEL (1959).

#### 2.1.1 Problema Inverso

Neste caso são conhecidas:

$\varphi_1$  e  $\lambda_1$  (latitude e longitude geodésicas do ponto 1)

$\varphi_2$  e  $\lambda_2$  (latitude e longitude geodésicas do ponto 2)

Os termos que se deve calcular são:

$A_{12}$  e  $s_{12}$  (azimute geodésico e distância entre os dois pontos)

A formulação aplicada para a solução do problema inverso é:

$$1. M_i = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_i)^{3/2}}$$

Onde:

$M_i$  é o raio de curvatura da seção meridiana no ponto  $i$  ( $i = 1, 2$ )

$e^2$  é a excentricidade segunda

$$2. N_i = \frac{a}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_i)^{1/2}}$$

Onde:

$N_i$  é a grande normal no ponto  $i$  ( $i=1,2$ )

$$3. Nm = \frac{N_1 + N_2}{2}$$

$$4. Mm = \frac{M_1 + M_2}{2}$$

$$5. Bm = \frac{1}{2}$$

$$6. \varphi m = \frac{Nm \cdot \text{sen} 1''}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

$$7. x = \Delta \lambda'' \cdot \cos \varphi m \cdot Nm \cdot \text{sen} 1''$$

$$8. y = \frac{\Delta \varphi_{12}'' \cdot \cos(0,5 \Delta \lambda)}{Bm}$$

$$9. \text{Cálculo do azimute: } \text{tg} \left( A_{12} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{x}{y}$$

$$10. \text{Cálculo da distância entre os dois pontos: } s_{12} = \frac{x}{\text{sen} \left( A_{12} + \frac{\gamma}{2} \right)}$$

### 2.1.2 Problema Direto

Neste caso são conhecidas:

$\varphi_1$  e  $\lambda_1$  (latitude e longitude geodésicas do ponto 1)

$A_{12}$  e  $s_{12}$  (azimute geodésico do ponto 1 para o ponto 2 e distância entre os dois pontos)

Deve-se calcular:

$\varphi_2$  e  $\lambda_2$  (latitude e longitude geodésicas do ponto 2)

$A_{21}$  (azimute geodésico do ponto 2 para o ponto 1)

A formulação aplicada para a solução do problema direto é:

$$1. e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Onde:

$e^2$  é a excentricidade segunda

$a$  e  $b$  são, respectivamente, o semi-eixo maior e menor do elipsóide de referência

$$2. M_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)^{3/2}}$$

$$3. N_1 = \frac{a}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)^{1/2}}$$

$$4. B = \frac{1}{M_1 \cdot \text{sen} 1''}$$

$$5. C = \frac{\text{tg} \varphi_1}{2 \cdot M_1 \cdot N_1 \cdot \text{sen} 1''}$$

$$6. D = \frac{3e^2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \cdot \text{sen} 1''}{2(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_1)}$$

$$7. E = \frac{1 + 3 \cdot \text{tg}^2 \varphi_1}{6 N_1^2}$$

$$8. h = \frac{s_{12} \cdot \cos A_{12}}{M_1 \cdot \text{sen} 1''}$$

$$9. \delta \varphi'' = B \cdot s_{12} \cdot \cos A_{12} - C \cdot s_{12}^2 \cdot \text{sen}^2 A_{12} - h \cdot E \cdot s_{12}^2 \cdot \text{sen}^2 A_{12}$$

$$10. \Delta \varphi_{12}'' = \delta \varphi_{12}'' - D(\delta \varphi_{12}'')^2$$

$$11. \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta \varphi_{12}''$$

$$12. M_2 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_2)^{3/2}}$$

$$13. N_2 = \frac{a}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_2)^{1/2}}$$

$$14. T_{12} = \frac{s_{12} \cdot \text{sen} A_{12}}{N_2 \cdot \cos \varphi_2}$$

15.  $\Delta\lambda_{12}'' = \frac{T_{12}}{\text{sen } 1''} \left( 1 - \frac{s_{12}^2}{6M_2^2} + \frac{T_{12}^2}{6} \right)$
16.  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}$
17.  $\varphi_{12} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$
18.  $F = \frac{1}{12} \cdot \text{sen } \varphi_{12} \cdot \cos^2 \varphi_{12} \cdot \text{sen }^2 1''$
19. Cálculo da convergência meridiana:  $\gamma_{12}'' = \Delta\lambda_{12}'' \cdot \text{sen } \varphi_{12} \cdot \sec \frac{1}{2} \Delta\varphi_{12} + F (\Delta\lambda_{12}'')^3$
20. Cálculo do azimute:  $A_{21} = A_{12} + \gamma \pm 180^\circ$

## 2.2 Solução não iterativa para os Problemas Direto e Inverso da Geodésia: Fórmulas de Sodano

Nas décadas de 50 e 60 SODANO apresentou fórmulas que fornecem uma solução não iterativa para os problemas direto e inverso da Geodésia. Elas são de fácil programação computacional, além de apresentar equações auxiliares que visam garantir alto grau de acurácia para qualquer linha geodésica, não importando seu comprimento. A princípio, a dedução não iterativa foi desenvolvida para geodésicas muito longas, visando o cálculo computacional. Posteriormente, de forma a obter a mesma acurácia para geodésicas muito curtas, foram desenvolvidas fórmulas alternativas.

De maneira geral, as fórmulas alternativas para linhas curtas são também utilizadas para linhas longas, logo, é necessário programar apenas um conjunto de equações. As equações para a solução não iterativa desenvolvidas por SODANO são apresentadas na sequência (SODANO, 1965).

### 2.2.1 Problema Inverso

Neste caso são conhecidas:

B1 e L1 (latitude e longitude geodésicas do ponto 1)

B2 e L2 (latitude e longitude geodésicas do ponto 2)

Considera-se negativas as latitudes sul e longitudes oeste.

Os termos que se deve calcular são:

$\alpha$  e S (azimute geodésico (horário contado a partir do Norte) e distância entre os dois pontos)

A formulação aplicada para a solução do problema inverso é:

1.  $f = 1 - \frac{b_0}{a_0}$

Onde:

$a_0$  é o semi eixo maior do elipsóide de referência e  $b_0$  o semi eixo menor

2.  $L = (L_2 - L_1)$

3.  $\tan \beta_i = (\tan B_i) (1 - f)$  para  $|B| \leq 45^\circ$

$$\cot \beta_i = \frac{\cot B_i}{1 - f} \text{ para } |B| > 45^\circ$$

4.  $a = \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen } \beta_2$

5.  $b = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2$

6.  $\cos \phi = a + b \cdot \cos L$

$$\text{sen } \phi = \pm \sqrt{(\text{sen } L \cdot \cos \beta_2)^2 + \left[ \text{sen}(\beta_2 - \beta_1) + 2 \cdot \cos \beta_2 \cdot \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen}^2 \frac{L}{2} \right]^2}$$

7.  $c = \frac{b \cdot \text{sen } L}{\text{sen } \phi}$

8.  $m = 1 - c^2$

9.  $\frac{S}{b_0} = \left[ (1 + f + f^2) \phi \right] + a \left[ (f + f^2) \text{sen } \phi - \left( \frac{f^2}{2} \right) \phi^2 \cos \text{ec } \phi \right] + m \left[ - \left( \frac{f + f^2}{2} \right) \phi - \left( \frac{f + f^2}{2} \right) \text{sen } \phi \cos \phi + \left( \frac{f^2}{2} \right) \phi^2 \cot \phi \right] + a^2 \left[ - \left( \frac{f^2}{2} \right) \text{sen } \phi \cos \phi \right]$

$$+ m^2 \left[ \left( \frac{f^2}{16} \right) \phi + \left( \frac{f^2}{16} \right) \text{sen } \phi \cos \phi - \left( \frac{f^2}{2} \right) \phi^2 \cot \phi - \left( \frac{f^2}{8} \right) \text{sen } \phi \cos^3 \phi \right]$$

$$+ a \cdot m \left[ \left( \frac{f^2}{2} \right) \phi^2 \cos \text{ec } \phi + \left( \frac{f^2}{2} \right) \text{sen } \phi \cos^2 \phi \right]$$

10.  $\frac{\lambda - L}{c} = \left[ (f + f^2) \phi \right] + a \left[ - \left( \frac{f^2}{2} \right) \text{sen } \phi - (f^2) \phi^2 \cos \text{ec } \phi \right] + m \left[ - \left( \frac{5f^2}{4} \right) \phi + \left( \frac{f^2}{4} \right) \text{sen } \phi \cos \phi + (f^2) \phi^2 \cot \phi \right] \text{radianos}$

11.  $\cot \alpha_{1-2} = \frac{\left[ \text{sen}(\beta_2 - \beta_1) + 2 \cdot \cos \beta_2 \cdot \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen}^2 \frac{\lambda}{2} \right]}{\cos \beta_2 \cdot \text{sen } \lambda}$

$$\cot \alpha_{2-1} = \frac{\left[ \text{sen}(\beta_2 - \beta_1) - 2 \cdot \cos \beta_1 \cdot \text{sen } \beta_2 \cdot \text{sen}^2 \frac{\lambda}{2} \right]}{\cos \beta_1 \cdot \text{sen } \lambda}$$

Onde:  $(\beta_2 - \beta_1) = (B_2 - B_1) + 2[\text{sen}(B_2 - B_1)] \left[ (n + n^2 + n^3)a - (n - n^2 + n^3)b \right]$

Com:  $n = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0}$

### 2.2.2 Problema Direto

Neste caso são conhecidas:

B1 e L1 (latitude e longitude geodésicas do ponto 1)

$\alpha_{1-2}$  e S (azimute geodésico do ponto 1 para o ponto 2 (horário contado a partir do Norte) e distância entre os dois pontos)

Considera-se negativas as latitudes sul e longitudes oeste.

Deve-se calcular:

B2 e L2 (latitude e longitude geodésicas do ponto 2)

$\alpha_{2-1}$  (azimute geodésico do ponto 2 para o ponto 1 (horário contado a partir do Norte))

A formulação aplicada para a solução do problema direto é:

1.  $f = 1 - \frac{b_0}{a_0}$

Onde:

$a_0$  é o semi eixo maior do elipsóide de referência e  $b_0$  o semi eixo menor

2.  $e'^2 = \frac{(a_0^2 - b_0^2)}{a_0^2}$

3.  $n = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0}$

4.  $\tan \beta_i = (\tan B_i)(1 - f)$  para  $|B| \leq 45^\circ$   
 $\cot \beta_i = \frac{\cot B_i}{1 - f}$  para  $|B| > 45^\circ$

5.  $\cos \beta_0 = \cos \beta_1 \cdot \text{sen } \alpha_{1-2}$

6.  $g = \cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_{1-2}$

7.  $m_1 = \left( 1 + \frac{e'^2}{2} \text{sen}^2 \beta_1 \right) (1 - \cos^2 \beta_0)$

8.  $\phi_s = \left( \frac{S}{b_0} \right)$  radianos

9.  $a_1 = \left( 1 + \frac{e'^2}{2} \text{sen}^2 \beta_1 \right) (\text{sen}^2 \beta_1 \cos \phi_s + g \text{sen } \beta_1 \text{sen } \phi_s)$

10.  $\phi_0 = (\phi_s) + a_1 \left[ -\frac{e'^2}{2} \text{sen } \phi_s \right] + m_1 \left[ -\frac{e'^2}{4} \phi_s + \frac{e'^2}{4} \text{sen } \phi_s \cos \phi_s \right] +$   
 $+ a_1^2 \left[ \frac{5e'^4}{8} \text{sen } \phi_s \cos \phi_s \right] + m_1^2 \left[ \frac{11e'^4}{64} \phi_s - \frac{13e'^4}{64} \text{sen } \phi_s \cos \phi_s - \frac{e'^4}{8} \phi_s \cos^2 \phi_s + \frac{5e'^4}{32} \text{sen } \phi_s \cos^3 \phi_s \right] +$   
 $+ a_1 m_1 \left[ \frac{3e'^4}{8} \text{sen } \phi_s + \frac{e'^4}{4} \phi_s \cos \phi_s - \frac{5e'^4}{8} \text{sen } \phi_s \cos^2 \phi_s \right]$  radianos

11.  $\cot \alpha_{2-1} = \frac{(g \cdot \cos \phi_0 - \text{sen } \beta_1 \text{sen } \phi_0)}{\cos \beta_0}$

12.  $\cot \lambda = \frac{(\cos \beta_1 \cos \phi_0 - \text{sen } \beta_1 \text{sen } \phi_0 \cos \alpha_{1-2})}{\text{sen } \phi_0 \text{sen } \alpha_{1-2}}$

13.  $\frac{L - \lambda}{\cos \beta_0} = [-f \phi_s] + a_1 \left[ \frac{3f^2}{2} \text{sen } \phi_s \right] + m_1 \left[ \frac{3f^2}{4} \phi_s - \frac{3f^2}{4} \text{sen } \phi_s \cos \phi_s \right]$  radianos

14.  $L_2 = L_1 + L$

15.  $\text{sen } \beta_2 = \text{sen } \beta_1 \cos \phi_0 + g \text{sen } \phi_0$

16.  $\cos \beta_2 = +\sqrt{(\cos \beta_0)^2 + (g \cos \phi_0 - \text{sen } \beta_1 \text{sen } \phi_0)^2}$

17.  $\tan \beta_2 = \left( \frac{\text{sen } \beta_2}{\cos \beta_2} \right)$

ou

$$\cot \beta_2 = \left( \frac{\cos \beta_2}{\text{sen } \beta_2} \right)$$

usar o que fornecer o menor valor absoluto

18.  $\tan B_2 = \frac{\tan \beta_2}{(1 - f)}$

$$\cot B_2 = \cot \beta_1 (1 - f)$$

19.  $B_2' = B_1 + (\beta_2 - \beta_1) + 2[\text{sen}(\beta_2 - \beta_1)] \left[ (n + n^3) \cos(B_2 - B_1) + n^2 \cos(B_2 - B_1) \right]$

com

$$\sin(\beta_2 - \beta_1) = \sin \phi_0 \cos \alpha_{1-2} - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sin \beta_1 \cos \beta_2$$

### 2.3 Procedimento de Campo

Foi realizado o transporte de coordenadas desde os pontos AZIMUTE e RM03, cujas coordenadas geodésicas e azimute são conhecidos, até dois pilares de centragem forçada (denominados de P1 e PC). Como o ponto RM03 e os pilares não são intervisíveis, foram implantados dois pontos intermediários denominados de A e B.

O equipamento utilizado consta de: uma estação total TC2002 com precisão angular de 0,5" e linear de 1mm +1ppm, um alvo, um prisma, três tripés, um guarda-sol, barômetro e psicrômetro digital, o qual fornece a temperatura seca e a umidade relativa.

Os ângulos horizontal e vertical foram lidos em posição direta e inversa da luneta em quatro séries. Além disso, foram obtidos em campo dados de pressão, temperatura e umidade relativa.

Os cálculos foram realizados com as fórmulas de Puissant e de Sodano, ambas programadas em ambiente MatLab, sendo possível, com isso, uma comparação. E, finalmente, sobre os pontos envolvidos no transporte de coordenadas, a equipe efetuou também um levantamento GPS, cujo resultado foi utilizado em outras comparações.

#### 2.3.1 Cálculo da correção atmosférica às distâncias eletrônicas medidas em campo

Devido a influência dos fatores ambientais, tais como pressão, temperatura e umidade, faz-se necessário corrigir as medidas efetuadas de tais fatores. Esta correção é dada pelo fabricante do equipamento. Para a TC2002 tem-se que:

$$\Delta D_1 = 281,8 - \left[ \frac{0,29065 * p}{(1 + \alpha * t)} - \frac{4,126 * 10^{-4} * h}{(1 + \alpha * t)} * 10^x \right]$$

Onde:

$\Delta D_1$  = correção atmosférica em ppm

p = pressão atmosférica em mb

t = temperatura ambiente em °C

h = umidade relativa em %

$$\alpha = 1/273,16$$

$$x = \frac{7,5 * t}{237,3 + t} + 0,7857$$

A tabela 01 apresenta as correções às distâncias inclinadas devido aos fatores ambientais.

Tabela 01 : Correção Atmosférica das Distâncias

Est.	Pto.	D-Elet. (m)	Pressão (mb)	Humid. (%)	Temp. (°C)	Correção (ppm)	Correção (m)	D-Elet. Corr. (m)
RM03	A	250,9148	914,5	84,1	15,6	30,9	-0,0078	250,9070
A	B	345,2033	917,8	91,0	15,0	29,5	-0,0102	345,1931
B	P1	541,0389	915,5	47,5	20,3	34,4	-0,0187	541,0202
P1	PC	185,2801	923,0	51,3	23,0	34,9	-0,0065	185,2736

#### 2.3.2 Cálculo da distância horizontalizada e da altitude

Como a distância medida em campo é inclinada torna-se necessário horizontalizá-la.

$dh = di \cdot \cos(Hv - 90^\circ)$  quando o ângulo vertical é maior que 90° ou

$dh = di \cdot \sin(Hv)$  quando o ângulo vertical é menor que 90°

Onde:

dh = distância horizontalizada

di = distância inclinada

Hv = ângulo vertical

A altitude dos pontos é obtida por:

$$\Delta h_{12} = (tgHv * dh) - Hinst + Hsinal$$

Onde :

$\Delta h_{12}$  = desnível entre os pontos 1 e 2

Hv = ângulo vertical

dh = distância horizontalizada

Hinst = altura do instrumento

Hsinal = altura do prisma

Na tabela 02 observa-se os resultados obtidos para a distância horizontalizada e para a altitude dos pontos.

**Tabela 02 : Distância Horizontalizada e Altitudes dos Pontos**

Est.	Pto.	Ang-vert (° ' ")	D-elet. Corrigida (m)	D-Horizont. (m)	H-inst. (m)	H-sinal (m)	Altitude (m)
	RM03						926,855
RM03	A	92 37 23,1375	250,9070	250,6441	1,232	1,580	915,0241
A	B	89 04 59,1125	345,1931	345,1489	1,584	1,507	920,6250
B	P1	90 41 30,7000	541,0202	540,9808	1,564	0,234	915,4222
P1	PC	88 08 50,5750	185,2736	185,1768	0,238	0,234	921,4158

### 2.3.3 Cálculo da distância elipsoidal entre os pontos

A distância reduzida a superfície de referência é obtida por:

$$D_{red} = \frac{dh * R}{h + \Delta N + R}$$

Onde:

Dred = distância reduzida à corda

dh = distância horizontal

R =  $\sqrt{M.N}$ , calculado para a latitude média entre os dois pontos

h = altitude média

$\Delta N$  = ondulação geoidal

e a passagem do arco para a corda é dada por:

$$D_{elip} = 2 * R * \text{tg} \frac{\beta}{2}$$

Onde:

Delip = distância elipsoidal

$\beta$  = ângulo dos raios vetores que unem os dois pontos considerados ao centro da Terra.

A tabela 03 mostra a distância reduzida ao elipsóide.

**Tabela 03 : Distância Elipsoidal entre os pontos**

Est.	Pto.	Ang-Hor. (° ' ")	Azimute (° ' ")	D-Hor. (m)	Alt-Média (m)	Latit-Média (° ' ")	Raio-Médio (m)	D-Elips (S) (m)
RM03	AZMT		345 53 19,88					
RM03	A	256 11 02,7750	242 04 22,65	250,6441	920,9396	25 26 54,71	6 374 642,021	250,60784
A	B	140 01 13,0375	202 05 39,10	345,1489	917,8246	25 27 01,82	6 364 643,162	345,09913
B	P1	189 31 11,6125	211 36 52,71	540,9808	918,0236	25 27 14,49	6 364 645,196	540,90278
P1	PC	305 11 33,6500	336 48 30,72	185,1768	918,4190	25 27 19,21	6 364 645,953	185,15008

### 2.4 Resultados obtidos com as Fórmulas de Puissant

Na tabela 04 observa-se quais foram os resultados obtidos no transporte de coordenadas utilizando as fórmulas de Puissant.

**Tabela 04 : Transporte de Coordenadas – Fórmulas de Puissant**

Est.	Pto.	Ang-Hor. (° ' ")	Azimute (° ' ")	S (m)	Latitude (S) (° ' ")	Longitude (W) (° ' ")
	AZMT				25 26 46,365952	49 13 52,258382
RM03	AZMT		345 53 19,878159		25 26 52,804380	49 13 50,475740
RM03	A	256 11 02,7750	242 04 22,653159	250,60784		
A	RM03		062 04 26,058633		25 26 56,618520	49 13 58,400974
A	B	140 01 13,0375	202 05 39,096133	345,09913		
B	A		022 05 41,092675		25 27 07,009602	49 14 03,046999

B	P1	189 31 11,6125	211 36 52,705175	540,90278		
P1	B		031 36 57,067182		25 27 21,978482	49 14 13,196235
P1	PC	305 11 33,6500	336 48 30,717182	185,15008		
PC	P1		156 48 31,838910		25 27 16,447881	49 14 15,806075

A tabela 05 mostra as coordenadas dos pontos ocupados no transporte de coordenadas.

**Tabela 05 : Coordenadas Finais**

Est.	Latitude (S) (° ' ")	Longitude (W) (° ' ")	Altitude (m)
AZMT	25 26 46,365952	49 13 52,258382	
RMO3	25 26 52,804380	49 13 50,475740	926,8550
A	25 26 56,618520	49 13 58,400974	915,0241
B	25 27 07,009602	49 14 03,046999	920,6250
P1	25 27 21,978482	49 14 13,196235	915,4222
PC	25 27 16,447881	49 14 15,806075	921,4158

## 2.5 Resultados obtidos com as Fórmulas de Sodano

Na tabela 06 observa-se os resultados obtidos no transporte de coordenadas utilizando as fórmulas de Sodano.

**Tabela 06 : Transporte de Coordenadas – Fórmulas de Sodano**

Est.	Pto	Ang-Hor. (° ' ")	Azimute (° ' ")	S (m)	Latitude (S) (° ' ")	Longitude (W) (° ' ")
AZMT					25 26 46,365952	49 13 52,258382
RM03	AZMT		345 53 19,878159		25 26 52,804380	49 13 50,475740
RM03	A	256 11 02,7750	242 04 22,653159	250,60784		
A	RM03		062 04 26,058718		25 26 56,618520	49 13 58,400974
A	B	140 01 13,0375	202 05 39,096218	345,09913		
B	A		022 05 41,092845		25 27 07,009602	49 14 03,046999
B	P1	189 31 11,6125	211 36 52,705345	540,90278		
P1	B		031 36 57,067437		25 27 21,978482	49 14 13,196235
P1	PC	305 11 33,6500	336 48 30,717437	185,15008		
PC	P1		156 48 31,839335		25 27 16,447880	49 14 15,806075

## 2.6 Comparação entre as duas formulações para o Transporte de Coordenadas

A partir dos resultados obtidos para o azimute e para as coordenadas dos pontos foi possível realizar uma comparação destes valores quanto ao tipo de formulação empregada, Puissant e Sodano. A tabela 07 apresenta as diferenças obtidas entre azimutes e entre as coordenadas dos pontos.

**Tabela 07 : Diferenças entre Puissant e Sodano**

Pto	Pto	Azimute (")	Latitude (") (cm)	Longitude (") (cm)
A			0,000000 - 0,000	0,000000 - 0,000
A	B	0,000085		
B			0,000000 - 0,000	0,000000 - 0,000
B	P1	0,000170		
P1			0,000000 - 0,000	0,000000 - 0,000
P1	PC	0,000255		
PC			0,000001 - 0,003	0,000000 - 0,0000

Verifica-se pela tabela 07 que para o levantamento efetuado, a diferença entre os valores obtidos com a formulação de Puissant e com a de Sodano é negligenciável.

## 2.7 Comparação utilizando Dados GPS

Como dito anteriormente, a equipe realizou um levantamento GPS sobre os pontos envolvidos no transporte de coordenadas (ver seção 3). Obtidos os valores das coordenadas dos pontos através de pós processamento, foi possível realizar outras comparações, apresentadas na sequência.

A tabela 08 apresenta os valores das coordenadas quando no processamento foram mantidas fixas as coordenadas dos pontos PARA e RM03. As coordenadas de ambos os pontos são conhecidas, sendo que o ponto PARA faz parte da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC).

**Tabela 08** : Azimutes, Distâncias e Coordenadas GPS - fixos "PARA" (Lat,Lon,Alt) e "RM03" (Lat,Lon,Alt)

Pto	Pto	Azimute (° ' ")	Distância (m)	Latitude (S) (° ' ")	Longitude (W) (° ' ")	Altitude (m)
AZMT				25 26 46,365952	49 13 52,258382	931,417316
RM03	AZMT	345 53 19,878159	204,289101	25 26 52,804380	49 13 50,475740	926,855000
P1				25 27 21,977508	49 14 13,196076	915,464498
P1	PC	336 48 41,074516	185,145688			
PC				25 27 16,446919	49 14 15,805548	921,444400

A tabela 09 apresenta as diferenças dos valores obtidos do rastreo GPS e dos valores obtidos no levantamento com a estação total e utilizando a formulação de Puissant.

**Tabela 09** : Diferenças GPS - Poligonal por Puissant

Pto	Pto	Azimute (")	Distância (cm)	Latitude (") - (cm)	Longitude (") - (cm)	Altitude (cm)
P1				0,000974 - 2,92	0,000159 - 0,48	4,23
P1	PC	10,357334	0,44			
PC				0,000962 - 2,89	0,000527 - 1,58	2,86

A tabela 10 apresenta as diferenças dos valores obtidos do rastreo GPS e dos valores obtidos no levantamento com a estação total e utilizando a formulação de Sodano.

**Tabela 10** : Diferenças GPS - Poligonal por Sodano

Pto	Pto	Azimute (")	Distância (cm)	Latitude (") - (cm)	Longitude (") - (cm)	Altitude (cm)
P1				0,000974 - 2,92	0,000159 - 0,48	4,23
P1	PC	9,937396	0,44			
PC				0,000961 - 2,88	0,000527 - 1,58	2,86

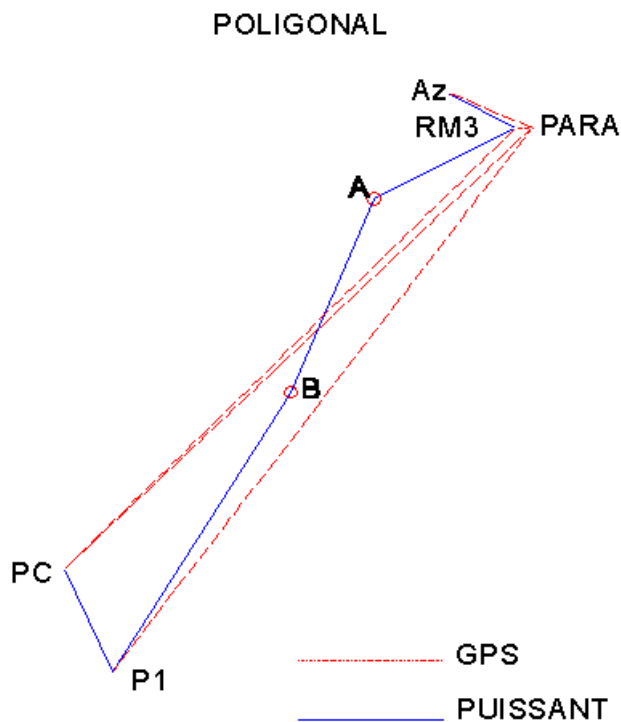
## 3 Levantamento GPS

A equipe realizou um posicionamento GPS relativo estático, visando determinar as coordenadas dos pilares de centragem forçada (denominados de PC e P1). Com o conhecimento destas coordenadas foi possível realizar as comparações apresentadas na seção 2.7.

### 3.1 Procedimento de Campo

O método aplicado com o GPS foi o relativo, com a técnica estática. Cada ponto foi rastreado por um período de uma hora, com a portadora L1 visto que os comprimentos das linhas de base eram muito curtos (menores do que 1 km), e suas coordenadas foram obtidas através do pós processamento dos dados com o programa PRISM (Ashtec), utilizando as efemérides transmitidas. Para o rastreo foi estipulada uma taxa de coleta de dados de 15s, PDOP limite de 6 e máscara de elevação de 10 graus.

A figura 03 apresenta um croqui dos pontos rastreados por GPS e da linha utilizada para o transporte de coordenadas. Os pontos A e B foram implantados durante o transporte de coordenadas visto que o ponto RM03 e os pilares de centragem forçada não são intervisíveis.



**Fig. 3** : Croqui do Levantamento GPS e Transporte de Coordenadas

Os equipamentos utilizados em campo foram:

- 01 receptor geodésico de dupla frequência Trimble SSI;
- 02 receptores geodésicos de dupla frequência Ashtech Z-XII;

Na etapa de processamento foi realizado um ajustamento injuncionando as estações PARA e RM03. As coordenadas dos pontos PARA e RM03 são conhecidas, tanto em WGS84 como em SAD69, com isso foram determinados parâmetros de transformação entre estes dois referenciais. Com estes parâmetros foram transformadas de WGS84 para SAD69 as coordenadas dos pontos P1 e PC obtidas após os ajustamentos. Foram estas coordenadas (em SAD69) as utilizadas na seção 2.7, onde realizou-se a comparação com os resultados obtidos através das fórmulas de Puissant e de Sodano.

### 3.2 Resultados

A tabela 11 apresenta os valores das coordenadas (latitude e longitude) dos pontos P1 e PC em SAD69, obtidos do ajustamento. As coordenadas dos pontos PARA e RM03 são conhecidas, sendo que o ponto PARA faz parte da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC).

**Tabela 11** : Coordenadas do rastreo GPS em SAD-69 – Fixando PARA e RM03

Ponto	Latitude (S) (° ' ")	Longitude (W) (° ' ")
AZIMUTE	25 26 46,365952	49 13 52,258382
RM03	25 26 52,804380	49 13 50,475740
P1	25 27 21,977508	49 14 13,196076
PC	25 27 16,446919	49 14 15,805548

## 4 Considerações Finais

Levando em conta todas as etapas deste trabalho, são indicadas na seqüência, algumas considerações finais.

No transporte de coordenadas as fórmulas de Puissant e as de Sodano fornecem o mesmo resultado até o centésimo do milímetro. Deve ser destacado que a base medida é uma base curta. São necessários outros estudos com bases de comprimentos maiores para se chegar a conclusões mais decisivas.

A diferença máxima entre as coordenadas obtidas por GPS e pelo método tradicional (levantamento com a estação total) foi de 2,92 cm em latitude e de 1,58 cm em longitude, considerando que no processamento foram mantidas fixas as coordenadas do ponto PARA e RM03. Quanto ao valor do azimute, verifica-se pela tabela 09 que a diferença é da ordem de 10".

## 5 Referências Bibliográficas

**ASHTECH Z-12 TM GPS Receiver** *Operating Manual*. May 1994.

**GEMAEL, C.** *Geodésia Elementar*. Diretório de Engenharia do Paraná – DAEP. Curitiba, 1959.

**HOSMER, G.L.** *Geodesy*. Editora: John Wiley & Sons. New York, 1946.

**SODANO, E.M.** *General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems*. Paris, année 1965, nº75 mars. Bulletin Geodésique.

**WILD TC2002** *User Manual*. Página 24-9